

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de trois problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1

Une urne contient 11 boules : 6 bleues, 3 rouges et 2 vertes.
On procède à un tirage simultané de 3 boules.

- 1) Calculer la probabilité que les 3 boules tirées soient toutes de couleurs différentes.
- 2) Calculer la probabilité que les 3 boules soient de la même couleur.
- 3) On définit la variable aléatoire X égale au nombre de boules bleues tirées.
Donner la loi de probabilité de X .
Calculer son espérance et son écart-type.

Problème 2

Les parties A et B sont indépendantes.

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Partie A

Soit une matrice $M \in M_3$.

On suppose que M vérifie la relation (R) :

$$(R) \quad M^2 = aM + bI$$

où I est la matrice identité de M_3 , et a et b sont deux nombres réels non nuls.

1) Montrer que M est inversible et donner l'expression de son inverse M^{-1} .

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A vérifie la relation (R) , et donner les valeurs de a et b associées.

3) En déduire l'expression de A^{-1} , inverse de A .

Partie B

Soit B la matrice suivante de M_3 :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs propres de B ? En déduire que B est diagonalisable (on notera par D la matrice diagonale semblable à B).

2) Déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P .

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression générale de B^n en fonction de D et P et calculer sa valeur explicite.

Problème 3

Partie A

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1) = 1$ et $a(n+1) = a(n) + 2$

(2) $b(1) = 6$ et $b(n+1) = b(n) - 1$

On considère la suite $\{u(n)\}$ définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u(n) = 10a(n) + b(n)$$

1) Quelle est la nature des suites $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$? Déterminer les expressions des termes généraux $a(n)$ et $b(n)$ en fonction de n , $a(1)$, $b(1)$.

2) Quelle est la nature de la suite $\{u(n)\}$? Donner l'expression du terme général $u(n)$ en fonction de n et $u(1)$.

3) A partir de quelle valeur de n la condition $u(n) > 1000$ est-elle vérifiée ?

4) On donne la liste de chiffres : $1 - 6 - 3 - 5 - 5 - 4 - 7 - \dots$

Quels sont les trois chiffres suivants ?

Partie B

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1)$ et $a(n+1) = a(n) + \lambda$

(2) $b(1)$ et $b(n+1) = b(n) + \mu$

où $a(1)$ et $b(1)$ sont des entiers compris entre 1 et 6, λ et μ sont des nombres entiers relatifs, non nuls, tels que $-2 \leq \lambda, \mu \leq 2$.

1) Donner la nature de la suite $\{u(n)\}$, définie comme dans la Partie A, et l'expression de son terme général $u(n)$ en fonction de n , $u(1)$, λ et μ .

La suite $\{u(n)\}$ peut-elle être une suite constante ?

2) Pour n fixé, déterminer le maximum et le minimum de $u(n)$.

3) Etudier l'éventuelle nullité de $u(n)$ selon les valeurs de $a(1)$, $b(1)$, λ et μ . Quelles sont alors les valeurs de n telles que $u(n) = 0$?

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES



Problème 1

Une urne contient 11 boules : 6 bleues, 3 rouges et 2 vertes.
On procède à un tirage simultané de 3 boules.

1) Calculer la probabilité que les 3 boules tirées soient toutes de couleurs différentes.

Soit A cet événement.

$$P(A) = (C_6^1 C_3^1 C_2^1) / C_{11}^3 = 12/55$$

2) Calculer la probabilité que les 3 boules soient de la même couleur.

Soit B ce deuxième événement.

$$P(B) = (C_6^3 + C_3^3) / C_{11}^3 = 21/165 = 7/55$$

3) On définit la variable aléatoire X égale au nombre de boules bleues tirées.

Donner la loi de probabilité de X .

Calculer son espérance et son écart-type.

X peut prendre 4 valeurs x : $x = 0, 1, 2$ et 3 .

$$P(X = x) = (C_6^x C_5^{3-x}) / C_{11}^3$$

Ce qui donne :

$$P(X = 0) = 2/33$$

$$P(X = 1) = 12/33 = 4/11$$

$$P(X = 2) = 15/33 = 5/11$$

$$P(X = 3) = 4/33$$

$$\text{Espérance } E(X) = \sum_{i=0}^3 p_i x_i = 54/33 = 18/11 \sim 1,64$$

$$E(X^2) = 108/33 \sim 3,27$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (108/33) - (54/33)^2 = 648/1089 = 0,595$$

D'où un écart-type égal à 0,77

Problème 2

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées 3×3 à coefficients réels. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit une matrice $M \in M_3$.

On suppose que M vérifie la relation (R) :

$$(R) \quad M^2 = aM + bI$$

où I est la matrice identité de M_3 , et a et b sont deux nombres réels non nuls.

1) Montrer que M est inversible et donner l'expression de son inverse M^{-1} .

On a $M(M - aI) = bI$

La matrice $C = b^{-1}(M - aI)$ vérifie $M.C = I$

Donc $b^{-1}(M - aI)$ est l'inverse de M .

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A vérifie la relation (R), et donner les valeurs de a et b associées.

On calcule aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On en déduit que $A^2 = A + 2I$, $a = 1$ et $b = 2$.

Donc $A[(A - I)/2] = I$

3) En déduire l'expression de A^{-1} , inverse de A .

$$A^{-1} = (A - I)/2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Partie B

Soit B la matrice suivante de M_3 :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs propres de B ? En déduire que B est diagonalisable (on notera par D la matrice diagonale).

$$\text{Soit } B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2 - \lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Son déterminant (polynôme caractéristique) est $P(\lambda) = (1 - \lambda)(4 + \lambda)(\lambda - 2)$.

Donc B admet trois valeurs propres distinctes qui sont 1, 2, -4.

B , matrice de M_3 , admettant 3 valeurs propres réelles distinctes, est donc bien diagonalisable.

2) Déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P .

Les trois sous-espaces propres étant de dimension 1, il suffit de trouver un vecteur propre (x, y, z) associé à chacune des valeurs propres.

Pour $\lambda = 1$:

$$2y - z = x$$

$$3x - 2y = y$$

$$-2x + 2y + z = z$$

On en déduit $x = y$ et $x = z$: prenons $e(1) = (1, 1, 1)$

Pour $\lambda = 2$:

$$-2x + 2y - z = 0$$

$$3x - 4y = 0$$

$$-2x + 2y - z = 0$$

On en déduit $3x - 4y = 0$ et $-2x + 2y - z = 0$: prenons $x = 4$, donc $y = 3$ et $z = -2$.

Soit le vp $e(2) = (4, 3, -2)$

Pour $\lambda = -4$:

$$-4x + 2y - z = 0$$

$$3x + 2y = 0$$

$$-2x + 2y + 5z = 0$$

On en déduit $x - z = 0$ et $3x + 2y = 0$: prenons $x = 2$, donc $z = 2$ et $y = -3$.

Soit le vp $e(-4) = (2, -3, 2)$.

$$\text{La matrice de passage } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression générale de B^n en fonction de D et P et calculer sa valeur explicite.

On sait que $D = P^{-1}BP$

$$\text{Avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$$

Et $D^n = P^{-1}B^n P$; on en déduit : $B^n = PD^nP^{-1}$

$$P^{-1} = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le calcul, on trouve :

$$B^n = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} -5 \cdot 2^{n+2} - 10(-4)^n & -12 + 12(-4)^n & -18 + 5 \cdot 2^{n+2} - 2(-4)^n \\ -15 \cdot 2^n - 15(-4)^n & -12 - 18(-4)^n & -18 + 5 \cdot 2^{n+1} + 3(-4)^n \\ 5 \cdot 2^{n+1} - 10(-4)^n & -12 + 12(-4)^n & -18 - 5 \cdot 2^{n+1} - 2(-4)^n \end{pmatrix}$$

Problème 3

Partie A

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1) = 1$ et $a(n+1) = a(n) + 2$

(2) $b(1) = 6$ et $b(n+1) = b(n) - 1$

On définit la suite $\{u(n)\}$ définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u(n) = 10a(n) + b(n)$$

1) Quelle est la nature des suites $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$? Déterminer les expressions des termes généraux $a(n)$ et $b(n)$ en fonction de n , $a(1)$, $b(1)$.

Les suites $a(n)$ et $b(n)$ sont des suites arithmétiques respectivement de premier terme 1 (6) et de raison 2 (-1).

On obtient facilement :

$$a(n) = 1 + 2(n-1)$$

$$b(n) = 6 - (n-1)$$

2) Quelle est la nature de la suite $\{u(n)\}$? Donner l'expression du terme général $u(n)$ en fonction de n et $u(1)$.

$$u(n+1) = 10a(n+1) + b(n+1) = 10(a(n) + 2) + b(n) - 1 = 10a(n) + b(n) + 19 = u(n) + 19$$

La suite $\{u(n)\}$ est une suite arithmétique de raison 19 et de premier terme $u(1) = 16$

$$\text{Son terme général est } u(n) = u(1) + 19(n-1) = 16 + 19(n-1) = 19n - 3$$

3) A partir de quelle valeur de n la condition $u(n) > 1000$ est-elle vérifiée ?

$$19n - 3 > 1000$$

$$n > (1000 + 3)/19 = 52,8$$

A partir de $n = 53$, $u(n)$ est supérieur strictement à 1000 (et on a : $u(53) = 1004$)

4) On donne la liste de chiffres : 1 ; 6 ; 3 ; 5 ; 5 ; 4 ; 7 ;

Quels sont les trois chiffres suivants ?

$$u(1) = 16, u(2) = 35, u(3) = 54, u(4) = 73, u(5) = 92$$

On remarque que la liste est la succession des chiffres composant les nombres $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$, etc. C'est un mode de construction de suite infinie de chiffres.

Les trois chiffres suivants après 7 sont donc 3, 9, 2.

Partie B

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier par strictement positif, définies par :

$$(1) \ a(1) \text{ et } a(n+1) = a(n) + \lambda$$

$$(2) \ b(1) \text{ et } b(n+1) = b(n) + \mu$$

où $a(1)$ et $b(1)$ sont des entiers compris entre 1 et 6, λ et μ sont des nombres entiers relatifs, non nuls, tels que $-2 \leq \lambda, \mu \leq 2$.

1) Donner la nature de la suite $\{u(n)\}$, définie comme dans la Partie A, et l'expression de son terme général $u(n)$ en fonction de n , $u(1)$, λ et μ .

La suite $\{u(n)\}$ peut-elle être une suite constante ?

$$u(n+1) = 10a(n+1) + b(n+1) = 10(a(n) + \lambda) + b(n) + \mu = 10a(n) + b(n) + 10\lambda + \mu$$

$$u(n+1) = u(n) + (10\lambda + \mu)$$

Suite arithmétique de premier terme $u(1) = 10a(1) + b(1)$ et de raison $(10\lambda + \mu)$

Son terme général est donc : $u(n) = u(1) + (n-1)(10\lambda + \mu)$

$$u(n) = 10a(1) + b(1) + (n-1) \cdot (10\lambda + \mu)$$

La suite $u(n)$ est constante si $(10\lambda + \mu) = 0$. Ce qui est impossible puisque λ et μ sont des nombres entiers relatifs non nuls.

2) Pour n fixé, déterminer le maximum et le minimum de $u(n)$.

Puisque $1 \leq a(1)$, $b(1) \leq 6$, on en déduit que $10a(1) + b(1)$ vaut au minimum 11 et au maximum 66.

De même, puisque $-2 \leq \lambda, \mu \leq 2$, avec λ, μ non nuls, on en déduit que $10\lambda + \mu$ vaut au minimum -22 et au maximum 22.

$u(n)$ varie donc entre -11 et 88.

3) Etudier l'éventuelle nullité de $u(n)$ selon les valeurs de $a(1)$, $b(1)$, λ et μ . Quelles sont alors les valeurs de n telles que $u(n) = 0$?

Puisque $u(n)$ est compris entre -11 et 88, il peut être nul.

Pour quelles valeurs des paramètres $a(1)$, $b(1)$, λ et μ $u(n)$ sera-t-il nul ?

$$u(n) = 0 \Leftrightarrow 10a(1) + b(1) + (n-1) \cdot (10\lambda + \mu) = 0 \Leftrightarrow n - 1 = - (10a(1) + b(1)) / (10\lambda + \mu)$$

On remarque que $10a(1) + b(1)$ est toujours > 0 ; il faut donc déterminer les paramètres $a(1)$, $b(1)$, λ et μ tels que $(10\lambda + \mu) < 0$, et $10a(1) + b(1)$ soit un multiple de $(10\lambda + \mu)$.

Tableau des valeurs de $(10\lambda + \mu)$

$10\lambda + \mu$	$\lambda = -2$	-1	1	2
$\mu = -2$	-22	-12	8	18
-1	-21	-11	9	19
1	-19	-9	11	21
2	-18	-8	12	22

Tableau des valeurs de $10a(1) + b(1)$

$10a(1)+b(1)$	$a(1) = 1$	2	3	4	5	6
$b(1) = 1$	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Valeurs admissibles pour $(10\lambda + \mu)$ et $10a(1)+b(1)$:

$10\lambda + \mu = -22$ ($\lambda = -2, \mu = -2$) et $10a(1)+b(1) = 22, 44, 66$

Pour $10a(1)+b(1) = 22$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 2$: $n = 2$

Pour $10a(1)+b(1) = 44$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 4$: $n = 3$

Pour $10a(1)+b(1) = 66$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 6$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -21$ ($\lambda = -2, \mu = -1$) et $10a(1)+b(1) = 21, 42, 63$

Pour $10a(1)+b(1) = 21$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 1$: $n = 2$

Pour $10a(1)+b(1) = 42$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 2$: $n = 3$

Pour $10a(1)+b(1) = 63$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 3$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -18$ ($\lambda = -2, \mu = 2$) et $10a(1)+b(1) = 36, 54$

Pour $10a(1)+b(1) = 36$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 6$: $n = 3$

Pour $10a(1)+b(1) = 54$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 4$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -12$ ($\lambda = -1, \mu = -2$) et $10a(1)+b(1) = 12, 24, 36$

Pour $10a(1)+b(1) = 12$, $a(1) = 1$ et $b(1) = 2$: $n = 2$

Pour $10a(1)+b(1) = 24$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 4$: $n = 3$

Pour $10a(1)+b(1) = 36$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 6$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -11$ ($\lambda = -1, \mu = -1$) et $10a(1)+b(1) = 22, 33, 44, 55, 66$

Pour $10a(1)+b(1) = 22$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 2 : n = 3$

Pour $10a(1)+b(1) = 33$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 3 : n = 4$

Pour $10a(1)+b(1) = 44$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 4 : n = 5$

Pour $10a(1)+b(1) = 55$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 5 : n = 6$

Pour $10a(1)+b(1) = 66$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 6 : n = 7$

$10\lambda + \mu = -9$ ($\lambda = -1, \mu = 1$) et $10a(1)+b(1) = 36, 45, 54, 63$

Pour $10a(1)+b(1) = 36$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 6 : n = 5$

Pour $10a(1)+b(1) = 45$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 5 : n = 6$

Pour $10a(1)+b(1) = 54$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 4 : n = 7$

Pour $10a(1)+b(1) = 63$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 3 : n = 8$

$10\lambda + \mu = -8$ ($\lambda = -1, \mu = 2$) et $10a(1)+b(1) = 16, 24, 32, 56, 64$

Pour $10a(1)+b(1) = 16$, $a(1) = 1$ et $b(1) = 6 : n = 3$

Pour $10a(1)+b(1) = 24$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 4 : n = 4$

Pour $10a(1)+b(1) = 32$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 2 : n = 5$

Pour $10a(1)+b(1) = 56$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 6 : n = 8$

Pour $10a(1)+b(1) = 64$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 4 : n = 9$