

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Comment concilier le devoir de mémoire et la nécessité de l'oubli ? Vous illustrerez votre argumentaire.

Sujet n° 2

« *Dans la vie rien n'est à craindre, tout est à comprendre* », (Marie Curie (1867-1934), scientifique célèbre pour ses recherches sur le radium, Prix Nobel de chimie.)
Que pensez-vous de cette approche scientifique ?

Sujet n° 3

Que pensez-vous de l'affirmation selon laquelle le pouvoir rend invulnérable ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème 1

Dans toute la composition, \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , et \mathcal{L} le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est à dire des fonctions φ telles qu'il existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi |x - y|$$

Le but du problème est de chercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x + a) = f(x) \quad (\star)$$

où $f \in \mathcal{L}$ est une fonction donnée et λ et a sont deux réels non nuls.

Partie I

1. Soit $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant (\star) . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka)$$
$$F(x) = \lambda^{-n} F(x - na) + \sum_{k=1}^n \lambda^{-k} f(x - ka)$$

2. Montrer que \mathcal{L} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable. Montrer que $f \in \mathcal{L}$ si et seulement si sa dérivée f' est bornée.
4. Soient f et g deux fonctions bornées de \mathcal{L} . Montrer que le produit $f.g$ appartient à \mathcal{L} . A l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce n'est plus le cas si f et g ne sont pas toutes les deux bornées.
5. Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq A|x| + B$$

6. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $|\lambda| < 1$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$ est absolument convergente.

En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (\star) et que F est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$$

- (b) Déterminer F dans les cas suivants :

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$

2. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$ est absolument convergente. En

déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (\star) et que F est donnée par

$$F(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$$

Partie III

1. On suppose que $\lambda = 1$.

- (a) Montrer que, pour qu'il existe une fonction $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (\star) , il faut que f soit bornée.
- (b) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - F(x + a) = 0$$

Cette fonction est-elle unique ?

2. On suppose que $\lambda = -1$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) + F(x+a) = 0$$

Cette fonction est-elle unique ?

(b) On suppose que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et de dérivée f' croissante.

i. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x+n)$ converge.

ii. Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (\star) et de limite nulle en $+\infty$.

2 Problème 2

L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n . On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et \mathbf{id}_E l'endomorphisme identité de E . On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E .

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k , on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k .

Si f est un endomorphisme de E , on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc.}$$

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

avec P élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k.$$

Partie I

Soit f un endomorphisme de E .

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\ker P(f)$ est stable par f .
2. (a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f .

- (b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme g de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer (en en donnant une base) les droites de \mathbb{R}^3 stables par g .

- (c) Soit p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n .
- i. Si F_1, \dots, F_p sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f , montrer qu'alors la somme $F_1 + \dots + F_p$ est un sous-espace vectoriel stable par f .
 - ii. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si n_1, \dots, n_p sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme

$$\sum_{k=1}^p \ker(f - \lambda_k \text{id}_E)^{n_k}$$

est stable par f .

3. (a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda \text{id}_E$.
- (b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?
- (c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?
- (d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?
- (e) Donner un exemple d'endomorphisme de \mathbb{R}^2 ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace \mathbb{R}^2 .
4. (a) On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans \mathbb{R} et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E .
- (b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \ker \varphi$.
 - i. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité : $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.
 - ii. On note A la matrice de f relativement à la base canonique de E et L la matrice (ligne) de φ relativement aux bases canoniques de E et \mathbb{R} .
 Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité :

$${}^t A^t L = \lambda^t L.$$
 - iii. Déterminer (en en donnant une base) les plans de \mathbb{R}^3 stables par l'endomorphisme g défini à la question 2).

Partie II

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et E_1, \dots, E_p les sous-espaces propres correspondants.

1. Que dire des sous-espaces vectoriels de E stables par f si $p = 1$?
2. On suppose l'entier p au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f et un élément x de F .

(a) Justifier l'existence d'un unique élément (x_1, x_2, \dots, x_p) de $\prod_{k=1}^p E_k$ vérifiant l'égalité :

$$x = \sum_{k=1}^p x_k$$

(b) Montrer que le vecteur $\sum_{k=2}^p (\lambda_k - \lambda_1)x_k$ appartient à F .

(c) Montrer que les vecteurs x_1, \dots, x_p sont tous dans F .

3. Dédurre de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^p F_k$ où, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k .
4. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f . Montrer que l'endomorphisme induit par f sur F est un endomorphisme diagonalisable de F .
5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f . Quel est alors ce nombre ?

Partie III

1. On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre n , c'est à dire vérifiant les conditions :

$$f^n = \mathbf{0} \text{ et } f^{n-1} \neq \mathbf{0}.$$

(a) Etablir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) vaut 1 si $j = i + 1$ et 0 sinon.

- (b) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f .

2. Dans cette question on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2, c'est à dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \mathbf{0}$.
- (a) On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E vérifiant $F_2 \cap \ker f = \{\mathbf{0}_E\}$. Justifier l'inclusion : $f(F_2) \subset \ker f$.
 - (b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\ker f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f .
 - (c) Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E , montrer l'inclusion suivante :

$$(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C.$$

A-t-on nécessairement l'égalité ?

- (d) Déterminer l'intersection $(F_1 + F_2) \cap \ker f$.
- (e) Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f . On pose $F_1 = F \cap \ker f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F . Vérifier l'inclusion $f(F) \subset \ker f$ et prouver que l'intersection $F_2 \cap \ker f$ est réduite au vecteur nul.

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1+x^2}$$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe selon les valeurs de n .

2. On pose $J_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ (avec $n \geq 0$)

- Calculer J_1 et J_2

3. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ et déterminer sa limite si cette suite est convergente.

Exercice n° 2

On considère dans R^3 , le plan P_a d'équation : $z = x + ay$, où a est un nombre réel quelconque.

1. Déterminer, dans la base canonique de R^3 , la matrice M_a de la projection orthogonale sur P_a .

2. Calculer M_a^n pour tout entier n strictement positif.

3. Déterminer, dans la base canonique de R^3 , la matrice S_a de la symétrie orthogonale par rapport à P_a .

Exercice n° 3

Soient A et B deux matrices carrées du même ordre à coefficients réels.

1. Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB est inversible et dans ce cas, exprimer $(AB)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1} .
2. Montrer que A est inversible si et seulement si A^p ($p \in \mathbb{N}^*$) est inversible et dans ce cas, exprimer $(A^p)^{-1}$ en fonction de A^{-1} .

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$

- Calculer A^n pour tout entier naturel n .
- Calculer (si elle existe) l'inverse de A .
- Vérifier que $(A^n)^{-1}$ existe.

Exercice n° 4

On définit une suite d'entiers naturels q_k ($k \in \mathbb{N}$) par $q_{k+1} = 2q_k + 1$ et $q_0 = 0$

1. Exprimer q_k en fonction de k .
2. On note $Q = \{q_k / k \in \mathbb{N}\}$ et on définit la suite (a_n) par :
 $a_0 = 1; a_{q_k} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k q_i}; a_n = 0$ si $n \notin Q$. Quelle est la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$?
3. Pour $x > 1$, calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{q_k} x^{q_k}$
4. On considère la suite (p_n) définie par : $p_0 = p \in]0, 1[; p_{n+1} = \sqrt{p_n}$. Etudier la convergence de la suite (p_n) .
5. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général : $v_n = \prod_{k=0}^n (1 + p_{k+1} - p_k)$

Exercice n° 5

Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n . On considère Q l'application numérique définie sur E_n par :

$$Q(p) = \int_{-1}^1 p^2(x)(1+x^2) dx$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique, dont la forme bilinéaire associée définit sur E_n un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une base orthogonale p_i ($i = 0, 1, \dots, n$) de E_n telle que le terme de plus haut degré de p_i soit X^i .
3. Pour $i \in \{1, \dots, n-2\}$, on note F_i le sous-espace de E_n engendré par les polynômes de degré strictement inférieur à i . Déterminer une base du sous-espace F_i^\perp orthogonal à F_i .
4. Montrer que $p_{i+2} - X p_{i+1}$ appartient à F_i^\perp . En déduire une relation entre p_{i+2}, p_{i+1}, p_i .
5. On suppose $n=2$.
 - Ecrire la matrice M de la forme bilinéaire symétrique associée à Q dans E_2
 - La matrice M est-elle inversible ?
 - La matrice M est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de ses éventuelles valeurs propres ?
6. Répondre à la question précédente dans le cas où $n=3$.

Exercice n° 6

1. Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$. Etudier les variations de g et tracer son graphe (on précisera ses extrema, ainsi que sa convexité).
2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$. On cherchera des solutions de la forme $y(x) = u(x)e^{-x^2/2}$.
3. On considère les fonctions numériques $f_{a,b}$ définies par $f_{a,b}(x) = (ax + b)e^{-x^2/2}$, où a et b sont deux nombres réels. On note $C_{a,b}$ leurs courbes représentatives. Montrer que pour a fixé non nul, les fonctions $f_{a,b}$ admettent des extrema et que les points correspondants à ces extrema sur $C_{a,b}$ appartiennent à un ensemble M_a . Représenter M_1 . Comment M_a se déduit de M_1 ?
4. Montrer que pour a fixé non nul, les courbes $C_{a,b}$ admettent trois points d'inflexion dont l'un est d'abscisse comprise entre -1 et 1.
5. Ces points d'inflexion appartiennent pour a fixé et b variable à un ensemble noté I_a . Représenter I_1 . Comment I_a se déduit de I_1 ?

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ECONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet :

Vous résumerez en 200 mots le texte ci-après d'Henri Leridon, paru dans *Le Monde diplomatique* en novembre 2015.

Vous n'oublierez pas d'indiquer le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

L'Afrique, énigme démographique

D'ici à 2050, la population de l'Afrique pourrait doubler, atteignant ainsi 2,4 milliards de personnes, avant de s'établir à 4 milliards vers 2100. Inattendues, ces projections démographiques établies par l'Organisation des Nations unies bouleversent les perspectives de développement du continent, en particulier si on les met en rapport avec les chiffres de la croissance économique.

Le dernier rapport de la Banque africaine de développement, de l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE) et du Programme des Nations unies pour le développement (PNUD) sur l'avenir économique de l'Afrique prévoit en effet que le taux de croissance moyen du produit intérieur brut (PIB) de 4,5 % observé au cours des quatre dernières années se maintiendra en 2015 et 2016. A priori, il s'agit d'une performance remarquable lorsqu'on la compare à celles de la zone euro (0,9 % en 2014) ou de l'Amérique latine (1,7 %), et honorable par rapport à celles de l'Asie du Sud et de l'Est (7 %). Toutefois, si l'on s'intéresse au PIB par habitant, le tableau se dégrade : la croissance de la richesse par habitant est ramenée à 1,6 % en Afrique subsaharienne, contre 0,4 % dans la zone euro, 0,6 % en Amérique latine et 6 % en Asie. En d'autres termes, la croissance démographique africaine pourrait ralentir fortement l'amélioration des conditions de vie des populations locales au cours des prochaines décennies. Cette perspective devrait conduire à envisager des mesures d'urgence ; or elle suscite peu de réactions.

Actuellement, la population africaine croît de 2,5 % par an, pour une moyenne mondiale de 1,2 %. Si l'Amérique latine et l'Asie suivent cette dernière tendance, l'Amérique du Nord croît plus faiblement encore (0,4 %), tandis que l'Europe est quasi stationnaire. Dans le grand mouvement de la transition démographique (qui voit la mortalité et la natalité baisser toutes les deux), l'Afrique resterait donc en retrait. Mais s'agit-il d'un simple retard ? En effet, il arrive fréquemment que, au cours de la transition, la mortalité diminue avant la fécondité.

S'ouvre alors une phase de forte croissance démographique, que l'on peut considérer comme une période instable de la transition. Plus cette période dure, plus la population augmente.

L'Amérique latine et l'Asie ont ainsi connu pendant quelques décennies des taux d'accroissement démographique annuel supérieurs ou égaux à 2 %, qui conduiront à une multiplication par, respectivement, 4,7 et 3,7 de leurs populations entre 1950 et 2050. L'Afrique subsaharienne dépasse le seuil de 2 % depuis soixante ans, et cela pourrait continuer pendant encore plusieurs décennies. Le coefficient multiplicateur sera alors très probablement supérieur à 11, et la population pourrait continuer à croître après 2050. Il existerait donc bien une spécificité de l'Afrique subsaharienne, l'évolution de l'Afrique du Nord ayant été très différente.

Cette situation résulte du maintien d'une forte fécondité. Celle-ci, outre qu'elle affichait des niveaux particulièrement élevés, a baissé plus lentement au début de la transition en Afrique subsaharienne qu'en Amérique latine et en Asie. La fécondité africaine actuelle correspond ainsi à celle de ces deux régions il y a quarante ans. Mais cette croissance de la population s'explique aussi en partie par la baisse de la mortalité. L'espérance de vie sur le continent, bien qu'encore éloignée de la moyenne mondiale (70,5 ans en 2010-2015), a gagné plus de vingt ans depuis 1950, passant de 36 à 57 ans. La baisse du taux de mortalité (nombre de décès rapporté à la population totale) a donc compensé la — faible — baisse de la fécondité.

Indifférence des responsables sanitaires

Cette évolution contribue encore à déconcerter l'observateur. Souvent, une réduction de la mortalité, surtout infantile ou juvénile, induit une baisse de la fécondité, fût-ce avec retard, les familles constatant qu'un plus grand nombre d'enfants survivent. De fait, depuis 1950, la mortalité juvénile (entre 0 et 5 ans) a été divisée par trois au sud du Sahara, passant de 30 % à 10 % ; mais cela n'a pas encore eu d'effet sur la fécondité.

En Afrique, où la plupart des naissances ont lieu au sein des mariages — ou de toute autre forme d'union reconnue —, l'évolution de l'âge lors de la première union peut jouer un rôle. Son augmentation a, par exemple, fortement contribué à la baisse de la fécondité dans un pays comme la Tunisie. Or une étude réalisée en 2003 dans trente pays d'Afrique subsaharienne a montré que le mariage y restait très précoce. Plus de la moitié des femmes entre 20 et 25 ans qui ont été interrogées avaient été mariées avant 20 ans dans les deux tiers de ces pays, et plus de 75 % dans sept pays. Une étude publiée en 2013, comparant les résultats des deux enquêtes les plus récentes dans 34 pays d'Afrique subsaharienne, a montré une augmentation moyenne de 0,3 année en cinq ans. L'élévation de l'âge du mariage est donc très lente, voire inexistante dans certains pays.

Souvent, la fécondité effective d'un pays se révèle proche du nombre d'enfants désirés par la population. Hors situation de contrainte, comme en Chine ou en Inde (lors des premières grandes campagnes de stérilisations), la première condition pour avoir peu d'enfants est donc d'en vouloir peu. Dans la plupart des pays en développement, le nombre d'enfants désirés a chuté : entre 2 et 3. Mais, en Afrique, il demeure très élevé. Selon une étude réalisée en 2010), dans 18 pays sur 26, le « nombre idéal d'enfants » déclaré par les femmes mariées était en moyenne supérieur à 5 et, dans deux cas, supérieur à 8. Là où l'on a interrogé aussi les hommes, l'idéal était presque partout supérieur à 5 et dépassait 8 dans six pays, le record étant

détenu par le Tchad, avec 13,7 enfants. Si les parents, et en particulier les pères, souhaitent une famille nombreuse, c'est principalement parce qu'elle paraît représenter une source de richesse, les enfants pouvant aider aux champs, garder le bétail et, plus tard, trouver de petits travaux en ville.

En outre, même lorsqu'on souhaite limiter sa descendance, encore faut-il disposer des moyens appropriés ; et la contraception reste peu répandue en Afrique. Alors que, en 2013, 63 % des femmes de 15-49 ans vivant en couple dans le monde utilisaient une méthode de contraception, et 57 % une méthode moderne (pilule, stérilet ou stérilisation), les proportions tombaient à 25 % et 20 % pour l'Afrique subsaharienne, et plus bas encore pour l'Afrique centrale et occidentale. Les faibles taux observés au Tchad, en Guinée, au Mali ou en Érythrée (moins de 10 %) indiquent que les responsables politiques et sanitaires de ces pays manifestent une indifférence totale à cette question, quand ils ne sont pas carrément favorables à une forte fécondité.

Dans l'enquête périodique réalisée par la division de la population des Nations unies, toutes les administrations d'Afrique occidentale, y compris celles du Mali et du Niger, déclarent souhaiter une diminution du taux de fécondité, en apportant notamment un « *soutien direct* » à la planification familiale. Pourtant, ces intentions ne semblent pas encore se traduire dans les faits, les méthodes contraceptives restant par exemple peu accessibles. « *En Afrique subsaharienne, analyse Jean-Pierre Guengant, directeur de recherche émérite à l'Institut de recherche pour le développement (IRD), les décideurs politiques considèrent encore largement que la croissance rapide de la population est un facteur de prospérité, car elle contribue à l'expansion des marchés et à la puissance des pays.* »

Les choses commencent cependant à bouger — lentement. En 2011, neuf gouvernements d'Afrique de l'Ouest, le Fonds des Nations unies pour la population (UNFPA), l'Agence française de développement et plusieurs grandes fondations privées ont signé un accord, dit « partenariat de Ouagadougou », destiné à favoriser la planification familiale. Il existe aussi des initiatives locales. Au Niger, l'association Animas-Sutura a monté en 2007 une radio communautaire couvrant une vingtaine de villages pour diffuser des conseils en matière d'hygiène, de nutrition et de santé, en évoquant en particulier les maladies sexuellement transmissibles et la planification familiale. Bien qu'il reste assez modeste (autour de 20 %), le recours à la contraception dans les villages concernés est maintenant comparable à celui observé dans les zones urbaines. Quant à l'Association pour la promotion féminine de Gaoua (APFG), elle développe autour de cette ville du sud du Burkina Faso des actions intégrées d'alphabétisation, de formation à l'artisanat et de planification familiale. Enfin, la communauté scientifique mondiale commence elle aussi à se saisir du problème. Une nécessaire « révolution contraceptive »

Mais, en matière démographique, l'inertie est forte. C'est la raison pour laquelle les prévisions à l'horizon 2050 semblent assez solides. Les chiffres cités plus haut sont ceux de l'hypothèse moyenne dans les dernières projections des Nations unies ; celle-ci implique une forte diminution de la fécondité, le nombre moyen d'enfants devant passer de 5 à 3 en à peine plus d'une génération. Si l'on parvenait à aller encore plus vite (2,6 enfants en 2050 dans l'hypothèse basse des Nations unies), la population de l'Afrique atteindrait 2,2 milliards en 2050, soit seulement 10 % de moins que l'hypothèse centrale. A l'horizon 2100, toutefois,

la baisse serait beaucoup plus substantielle : —40 %. Une fois encore, ce calcul montre que, pour obtenir un changement significatif à long terme, il est impératif de modifier très tôt les comportements.

L'Algérie, l'Egypte, le Maroc ou la Tunisie ont connu des transitions beaucoup plus rapides. Aujourd'hui, la fécondité y est comprise entre 2 et 3 enfants par femme, et les proportions d'utilisatrices de méthodes contraceptives sont comprises entre 60 % et 68 %, avec entre 52 % et 58 % de recours aux méthodes modernes, ce qui les situe dans la moyenne mondiale. En Afrique subsaharienne, l'Afrique du Sud atteint les mêmes niveaux (60 %, quasiment toutes en méthodes modernes), et le Kenya comme le Malawi s'en approchent, avec 46 %.

Diffuser l'usage de la contraception au sein des populations africaines n'a donc rien d'impossible. Mais, pour cela, les programmes que les organismes internationaux importent sans prêter grande attention aux spécificités locales ont montré leurs limites. Même là où ils ont pu avoir une certaine efficacité, comme au Ghana ou au Kenya, la fécondité semble être ensuite restée bloquée à 4 ou 5 enfants par femme. Il faut donc une plus grande implication des responsables politiques ou religieux et des leaders d'opinion de tout type. Il n'est pas toujours nécessaire que les gouvernements soutiennent ostensiblement le recours à la contraception : ils peuvent simplement laisser des relais privés et associatifs libres d'agir, comme l'a montré l'expérience de pays comme l'Algérie ou l'Iran.

Le meilleur levier reste toutefois une mobilisation directe des femmes. A cet égard, et même si l'effet n'est pas universel, on considère généralement qu'une élévation du niveau d'éducation des filles est indispensable. Or, en Afrique de l'Ouest par exemple, en 2010, environ 46 % des femmes de 20 à 39 ans n'avaient reçu aucune éducation (contre 31 % des hommes).

Les populations africaines aspirent légitimement à une amélioration de leurs conditions de vie, que la diminution du rythme de croissance démographique ne pourrait que favoriser. Investir dans l'éducation et améliorer le statut des femmes pourrait provoquer une « révolution contraceptive » dont les bénéfices couvriraient d'ailleurs de larges domaines de la santé, bien au-delà de la limitation des naissances.

Henri Leridon

Directeur de recherche émérite à l'Institut national d'études démographiques (INED), Paris.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème 1

Dans toute la composition, \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , et \mathcal{L} le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est à dire des fonctions φ telles qu'il existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi |x - y|$$

Le but du problème est de chercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x + a) = f(x) \quad (\star)$$

où $f \in \mathcal{L}$ est une fonction donnée et λ et a sont deux réels non nuls.

Partie I

1. Soit $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant (\star) . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka)$$
$$F(x) = \lambda^{-n} F(x - na) + \sum_{k=1}^n \lambda^{-k} f(x - ka)$$

Le résultat est immédiat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que \mathcal{L} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La fonction nulle appartient à \mathcal{L} . De plus, si f et g sont lipschitziennes de constantes K_f et K_g , la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est lipschitzienne de constante $|\alpha|K_f + |\beta|K_g$ car, par inégalité triangulaire,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leq |\alpha|K_f|x - y| + |\beta|K_g|x - y|$$

3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable. Montrer que $f \in \mathcal{L}$ si et seulement si sa dérivée f' est bornée. Supposons $f \in \mathcal{L}$. Alors pour tout $x \neq y$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq K_f$$

En faisant tendre $x \rightarrow y$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|f'(x)| \leq K_f$.

Réciproquement, si $|f'|$ est bornée par K , on a d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

4. Soient f et g deux fonctions bornées de \mathcal{L} . Montrer que le produit $f.g$ appartient à \mathcal{L} . A l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce n'est plus le cas si f et g ne sont pas toutes les deux bornées.

Soient f et g deux fonctions lipschitziennes bornées. Alors pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq \|f\|_\infty |g(x) - g(y)| + \|g\|_\infty |f(x) - f(y)| \\ &\leq (\|f\|_\infty K_g + \|g\|_\infty K_f) |x - y| \end{aligned}$$

Considérons $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sin(x)$. Comme ces fonctions sont dérivables et lipschitziennes, il suffit d'étudier le caractère borné de $(fg)'$ pour conclure. Or $(fg)'(x) = (x + 1)\sin(x)$ n'est pas bornée, ce qui fournit un contre exemple.

5. Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq A|x| + B$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(x_0)| \leq K_f|x - x_0|$. Et

$$|f(x)| - |f(x_0)| \leq K_f|x| + K_f|x_0|$$

ce qui donne le résultat avec $A = K_f$ et $B = K_f|x_0| + |f(x_0)|$.

6. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Quitte à permuter le rôle de x et y dans le calcul de $|f(x) - f(y)|$, on peut supposer $x - y \geq 0$. En notant $n = \lfloor x - y \rfloor$, la partie entière de $x - y$, il vient : $x = y + n + t$ avec $t \in [0, 1[$. Et

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(y+n) + f(y+n) - f(y+n-1) + \dots + f(y+1) - f(y)| \leq M(t+1+\dots+1)$$

c'est à dire $|f(x) - f(y)| \leq M(x - y)$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $|\lambda| < 1$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$ est absolument convergente.

En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (\star) et que F est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq A|x| + B$ d'après la partie précédente. D'où

$$|\lambda|^n |f(x + na)| \leq |\lambda|^n (A|x + na| + B)$$

qui est le terme général d'une série convergente (par comparaison avec la série géométrique de paramètre $|\lambda| < 1$ et sa série dérivée).

Il suffit alors de constater que F est bien définie par ce qui précède, et qu'elle vérifie (\star) . L'unicité est acquise par la condition nécessaire de la question 1 (partie 1) et un calcul immédiat montre que F est lipschitzienne.

- (b) Déterminer F dans les cas suivants :

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$

Pour f_1 on applique le calcul de la série géométrique pour obtenir $F_1(x) = \frac{1}{1 - \lambda}$. Pour f_2 , on utilise la même technique

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (\exp(ix + ina) + \exp(-ix - ina)) \\ &= \frac{\exp(ix)}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda \exp(ia))^n + \frac{\exp(-ix)}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda \exp(-ia))^n \\ &= \frac{\exp(ix)}{2} \frac{1}{1 - \lambda \exp(ia)} + \frac{\exp(-ix)}{2} \frac{1}{1 - \lambda \exp(-ia)} \\ &= \frac{\exp(ix)(1 - \lambda \exp(-ia)) + \exp(-ix)(1 - \lambda \exp(ia))}{2(1 - 2\lambda \cos(a) + \lambda^2)} \end{aligned}$$

d'où $F_2(x) = \frac{\cos(x) - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos(a) + \lambda^2}$. Finalement on applique la même méthode pour la fonction f_3 pour obtenir $F_3(x) = \frac{\sin(x) - \lambda \sin(x - a)}{1 - 2\lambda \cos(a) + \lambda^2}$

2. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$ est absolument convergente. En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (\star) et que F est donnée par

$$F(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$$

L'argument est identique aux questions précédentes, puisque $|\lambda|^{-1} < 1$.

Partie III

1. On suppose que $\lambda = 1$.

- (a) Montrer que, pour qu'il existe une fonction $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (\star) , il faut que f soit bornée.
 Soit F lipschitzienne telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(x+a) = f(x)$. Alors

$$|f(x)| = |F(x) - F(x+a)| \leq K_F |a|$$

et il est donc nécessaire que f soit bornée.

- (b) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - F(x+a) = 0$$

Cette fonction est-elle unique ?

Toute fonction $x \mapsto A \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ avec $A \in \mathbb{R}$ convient, une telle fonction n'est donc pas unique.

2. On suppose que $\lambda = -1$.

- (a) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) + F(x+a) = 0$$

Cette fonction est-elle unique ?

Comme précédemment, toute fonction $x \mapsto A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ convient.

- (b) On suppose que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et de dérivée f' croissante.

- i. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x+n)$ converge.

A x fixé, la suite $(f(x+n))$ est positive et décroissante vers 0. La série est donc convergente d'après le critère des séries alternées. On peut aussi simplement montrer que les suites des sommes partielles $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- ii. Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (\star) et de limite nulle en $+\infty$.

On pose comme à la question précédente $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x+n)$. Alors

$$F(x+1) + F(x) = f(x)$$

et par le théorème des séries alternées, $0 \leq F(x) \leq f(x)$ donc F est aussi de limite nulle en $+\infty$.

Soient x et y deux réels tels que $0 \leq x - y \leq 1$. Et $F(x) - F(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (f(x+n) - f(y+n))$.

L'inégalité des accroissements finis, la décroissance de f et la croissance de f' donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x+n) - f(y+n) \leq (x-y)f'(x+n) \leq (x-y)f'(y+n+1) \leq f(x+n+1) - f(y+n+1) \leq 0.$$

$F(x) - F(y)$ apparait donc comme la somme d'une série qui satisfait aux hypothèses du théorème des séries alternées. On en déduit que $|F(x) - F(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq K_f(x - y)$. D'après la partie précédente, on peut en déduire que F appartient à \mathcal{L} .

Soit enfin G une fonction de \mathcal{L} , tendant vers 0 en $+\infty$ et vérifiant (\star) . La fonction $G - F$ est 1-antipériodique et tend vers 0 en $+\infty$, donc est nulle. F est bien la seule solution dans \mathcal{L} qui tend vers 0 en $+\infty$.

2 Problème 2

L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n . On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et \mathbf{id}_E l'endomorphisme identité de E . On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E .

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k , on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k .

Si f est un endomorphisme de E , on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc.}$$

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

avec P élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k.$$

Partie I

Soit f un endomorphisme de E .

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\ker P(f)$ est stable par f .
 Soit $x \in \ker(P(f))$. Comme $P(f)$ et f commutent, on a $P(f)(f(x)) = f(P(f)(x)) = f(0) = 0$. Donc $f(x) \in \ker(f)$.

2. (a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f .

Soit D une droite stable par f , c'est à dire $D = \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0$. Comme D est stable, $f(u) \in D$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$, et u est un vecteur propre de f .

Réciproquement, si $D = \text{Vect}(u)$ avec u un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ , alors $f(\mu u) = \mu \lambda u \in D$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. Donc D est stable par f .

- (b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme g de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer (en en donnant une base) les droites de \mathbb{R}^3 stables par g .

Les droites stables sont engendrées par des vecteurs propres de g . Le spectre de g est $\{1, 2\}$. On résout $g(x) = x$ ce qui donne $\text{Vect}(e_1)$ et $g(x) = 2x$ ce qui donne $\text{Vect}(e_3)$.

- (c) Soit p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n .

- i. Si F_1, \dots, F_p sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f , montrer qu'alors la somme $F_1 + \dots + F_p$ est un sous-espace vectoriel stable par f .

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$. On a, par linéarité de f :

$$f(x_1 + \dots + x_p) = f(x_1) + \dots + f(x_p) \in F_1 + \dots + F_p$$

car les F_i sont stables par f .

- ii. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si n_1, \dots, n_p sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme

$$\sum_{k=1}^p \ker(f - \lambda_k \text{id}_E)^{n_k}$$

est stable par f .

Comme $\ker(P(f))$ est stable par f , les $\ker(f - \lambda_k \text{id}_E)^{n_k}$ sont stables par f . Et d'après la question précédente, leur somme est stable par f .

3. (a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda \text{id}_E$.

Soit F un sous-espace stable par f . Pour $x \in F$, $f(x) \in F$ et $\lambda x \in F$, donc $(f - \lambda \text{id})(x) \in F$.

Réciproquement, si F est stable par $f - \lambda \text{id}$, on a $f(x) - \lambda x \in F$ et $\lambda x \in F$ donc $f(x) \in F$.

- (b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?

Soit F stable par f . Alors $f(F) \subset F$, $f^2(F) \subset F$. F est donc stable par f^2 . La réciproque est fautive (prendre une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et une droite dans \mathbb{R}^2 , stable par f^2 mais pas par f).

- (c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?

Soit F stable par f^{-1} . On a $f^{-1}(F) \subset F$ et $\dim(f^{-1}(F)) = \dim(F)$, car f^{-1} est un automorphisme. Donc $f^{-1}(F) = F$. Soit $x \in F$, il existe $y \in F$ tel que $x = f^{-1}(y)$. Et $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y \in F$. Donc F est stable par f . Un raisonnement analogue montre que les sous-espaces stables par f^{-1} sont exactement ceux qui sont stables par f .

- (d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?

Un tel endomorphisme f est une homothétie : en effet, f laisse stable toutes les droites. D'après la première question, elles sont donc dirigées par des vecteurs propres. De plus, si u et v sont deux vecteurs non colinéaires (formant une famille libre),

$$f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda_u u + \lambda_v v$$

Et $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$ donc f admet une unique valeur propre, dont tout vecteur non nul est vecteur propre. C'est une homothétie.

- (e) Donner un exemple d'endomorphisme de \mathbb{R}^2 ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace \mathbb{R}^2 .

Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ convient.

4. (a) On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans \mathbb{R} et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E .

Soit φ une forme linéaire non nulle. Son image est \mathbb{R} , de dimension 1. Donc d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension $n - 1$, c'est donc un hyperplan. Réciproquement, si H est un hyperplan, il existe un supplémentaire D de H dans E , et $H \oplus D = E$. Donc D est de dimension 1, c'est une droite vectorielle, de vecteur directeur $u \neq 0$. Dans ce cas, on définit une forme linéaire φ par $\varphi(u) = 1$ et $\varphi(h) = 0$ pour $h \in H$. Et $\ker(\varphi) = H$.

- (b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \ker \varphi$.

- i. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité : $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

Supposons que H est stable par f . On note $D = \text{Vect}(u)$ une droite supplémentaire de H dans E .

Soit $x \in E$, $x = h + \alpha u$. Alors $f(x) = f(h) + \alpha f(u)$. En écrivant λu la projection de $f(u)$ sur D , il vient

$$\varphi(f(x)) = 0 + \alpha \lambda \varphi(u) = \lambda \varphi(x)$$

Réciproquement, si $\varphi \circ f = \lambda \varphi$, alors $\varphi(f(h)) = 0$ pour $h \in H$, c'est à dire $f(h) \in H$. D'où l'équivalence.

- ii. On note A la matrice de f relativement à la base canonique de E et L la matrice (ligne) de φ relativement aux bases canoniques de E et \mathbb{R} .

Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité :

$${}^t A^t L = \lambda^t L.$$

C'est la formulation matricielle de la question précédente.

iii. Déterminer (en en donnant une base) les plans de \mathbb{R}^3 stables par l'endomorphisme g défini à la question 2).

Soit H un plan stable de \mathbb{R}^3 : c'est un hyperplan, donc le noyau d'une forme linéaire φ . Avec les notations de la question précédente, il existe un réel λ vérifiant ${}^t B^t L = \lambda^t L$.

Donc ${}^t L$ est un vecteur propre associé à ${}^t B$.

— Si $\lambda = 1$, on trouve $H = \text{Vect}(e_1, e_3)$.

— Si $\lambda = 2$, on trouve $H = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

et on vérifie que les deux plans trouvés conviennent.

Partie II

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et E_1, \dots, E_p les sous-espaces propres correspondants.

1. Que dire des sous-espaces vectoriels de E stables par f si $p = 1$?

Comme f est diagonalisable et possède une unique valeur propre, c'est une homothétie. Donc tous les sous-espaces de E sont stables par f .

2. On suppose l'entier p au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f et un élément x de F .

(a) Justifier l'existence d'un unique élément (x_1, x_2, \dots, x_p) de $\prod_{k=1}^p E_k$ vérifiant l'égalité :

$$x = \sum_{k=1}^p x_k$$

Comme les E_i sont des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, ils sont en somme directe et $\bigoplus_{i=1}^p E_i = E$ car f est diagonalisable.

Pour un $x \in F$, en particulier $x \in E$, l'existence et l'unicité des x_i provient de la décomposition en somme directe de E .

(b) Montrer que le vecteur $\sum_{k=2}^p (\lambda_k - \lambda_1)x_k$ appartient à F .

Comme $f(x) \in F$, on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k \in F$$

d'où $f(x) - \lambda_1 x = \sum_{k=2}^p (\lambda_k - \lambda_1)x_k \in F$.

(c) Montrer que les vecteurs x_1, \dots, x_p sont tous dans F .

Avec le résultat de la question précédente, on note $y = \sum_{k=2}^p (\lambda_k - \lambda_1)x_k \in F$.

Donc $f(y) = \sum_{k=2}^p \lambda_k (\lambda_k - \lambda_1)x_k$ et $f(y) - \lambda_2 y = \sum_{k=3}^p (\lambda_k - \lambda_3)(\lambda_k - \lambda_1)x_k \in F$. Par une récurrence immédiate, on obtient $(\lambda_p - \lambda_{p-1}) \dots (\lambda_p - \lambda_1)x_p \in F$. Les valeurs propres étant distinctes, on a $x_p \in F$.

De même, par une récurrence descendante, on en déduit que les x_k appartiennent à F .

3. Dédurre de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^p F_k$ où, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k .

Les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^p F_k$ sont stables par f . Réciproquement, si F est

un sous-espace vectoriel stable par f , pour $x \in F$, x s'écrit de façon unique $\sum_{k=1}^p x_k$ avec $x_k \in E_k$ pour tout k . On pose $F_k = F \cap E_k$, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. Alors, F_k est bien un sous-espace vectoriel de E_k , et par double inclusion, $F = \sum_{k=1}^p F_k$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f . Montrer que l'endomorphisme induit par f sur F est un endomorphisme diagonalisable de F .

On note $\tilde{f} : x \mapsto f(x)$ l'endomorphisme de F induit par f . Alors, avec les notations de la question précédente, les F_k sont les sous-espaces propres de \tilde{f} , et leur somme directe vaut F d'après ce qui précède. Donc \tilde{f} est diagonalisable.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f . Quel est alors ce nombre ?

Une CNS pour que E possède un nombre fini de sous-espaces stables est $p = n$ (c'est à dire f possède n valeurs propres distinctes, associées à des espaces propres de dimension 1).

En effet : si f possède n valeurs propres distinctes, comme les sous-espaces stables sont formés de sommes de sous-espaces des espaces propres, elle possède donc 2^n sous-espaces stables. (Les seuls sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension 1 sont l'espace lui-même et $\{0\}$.) Et, par contraposée, si $p < n$, comme f est diagonalisable, elle admet au moins un sous-espace propre de dimension ≥ 2 , qui admet une infinité de sous-espaces vectoriels. Donc f admet une infinité de sous-espaces stables.

Partie III

1. On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre n , c'est à dire vérifiant les conditions :

$$f^n = \mathbf{0} \text{ et } f^{n-1} \neq \mathbf{0}.$$

- (a) Etablir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) vaut 1 si $j = i + 1$ et 0 sinon.

Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe un $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. On considère la famille $(f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$.

C'est une famille libre (car si $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x) = 0$, en composant par f^{n-1} , f^{n-2} ..., on trouve que les α_i sont tous nuls) qui possède n vecteurs, c'est donc une base. L'écriture de la matrice de f dans cette base s'en suit.

(b) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f .

Soit F un sous-espace de E stable par f non réduit à $\{0_E\}$. Avec les notations des questions précédentes, on pose $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Donc les F_k sont stables par f . Montrons que F est l'un des F_k . On note i l'indice minimal tel que $F \subset F_i$. Cet indice existe car $F \subset F_n$.

— Si $i = 1$, alors $F = F_1$ et c'est terminé.

— Sinon $i > 1$ et il existe $u \in F \setminus F_{i-1}$, d'où l'écriture $u = \sum_{k=1}^i u_k e_k$ avec $u_i \neq 0$.

Alors $G := \text{Vect}\{f^k(u) : k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace stable qui contient $e_1 = \frac{f^{i-1}(u)}{u_i}$, donc également $e_2 = \frac{f^{i-2}(u) - u_{i-1}e_1}{u_i}$ et ainsi de suite jusqu'à $e_{i-1} = \frac{f(u) - \sum_{j=1}^{i-2} u_{j+1}e_j}{u_i}$. Donc F_{i-1} est un sous-espace vectoriel strict de G (car $u \in G \setminus F_{i-1}$ donc $\dim G > i - 1$), lui-même étant un sous-espace vectoriel de F donc $\dim F \geq i = \dim F_i$ ce qui prouve que $F = F_i$.

2. Dans cette question on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2, c'est à dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \mathbf{0}$.

(a) On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E vérifiant $F_2 \cap \ker f = \{0_E\}$. Justifier l'inclusion : $f(F_2) \subset \ker f$.

Soit $y \in f(F_2)$. Il existe $x \in F_2$ tel que $f(x) = y$ et $f(f(x)) = f(y) = 0$. Donc $y \in \ker f$.

(b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\ker f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f .

On a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc la somme est directe. Et si $x = x_1 + x_2 \in F_1 + F_2$, alors

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) \in f(F_2) \subset F_1$$

Donc $F_1 + F_2$ est stable par f .

(c) Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E , montrer l'inclusion suivante :

$$(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C.$$

A-t-on nécessairement l'égalité ?

L'inclusion est banale. On n'a pas nécessairement égalité : prendre dans \mathbb{R}^2 $A = \text{Vect}(e_1)$, $B = \text{Vect}(e_2)$ et $C = \text{Vect}(e_2 + e_1)$.

(d) Déterminer l'intersection $(F_1 + F_2) \cap \ker f$.

$$(F_1 + F_2) \cap \ker f = F_1$$

(e) Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f . On pose $F_1 = F \cap \ker f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F . Vérifier l'inclusion $f(F) \subset \ker f$ et prouver que l'intersection $F_2 \cap \ker f$ est réduite au vecteur nul.

$$f(F) \subset f(E) \subset \ker(f). \text{ Et } F_2 \subset F \text{ donc } F_2 \cap \ker f \subset F \cap \ker f = F_1. \text{ Ainsi } F_2 \cap \ker f \subset F_2.$$

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ de la 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1+x^2}$$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe selon les valeurs de n .

La fonction f_n est définie sur R .

Si n est pair, la fonction f_n est paire et son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy.

Si n est impair, la fonction f_n est impaire et son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Il suffit d'étudier la fonction sur l'ensemble des nombres réels positifs.

La dérivée est : $f_n'(x) = \frac{n x^{n-1} (n + (n+1)x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$, la fonction est donc strictement croissante

de R^+ sur R^+ . Son graphe admet une branche parabolique dans la direction Oy et une tangente horizontale à l'origine (pour $n > 1$). Si $n = 1$, la pente à l'origine est 1.

2. On pose $J_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ (avec $n \geq 0$)

- Calculer J_1 et J_2

$$\text{On a : } J_1 = \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

$$\text{On a : } J_2 = \int_0^1 x \cdot x \sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{x}{3} (1+x^2)^{3/2} \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (1+x^2) \sqrt{1+x^2} dx \text{ (intégration par}$$

$$\text{parties). D'où } J_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} (J_0 + J_2), \text{ soit } J_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} J_0.$$

Il reste à calculer J_0 .

$$J_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx, \text{ on pose } x = \operatorname{sh} t.$$

On rappelle que $ch^2 t - sh^2 t = 1$, $(\operatorname{sh} t)' = ch t$ et $\operatorname{Argsh} t = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$\text{On obtient } J_0 = \int_0^{\operatorname{Argsh} 1} ch^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\operatorname{Ln}(1+\sqrt{2})} (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt = \frac{1}{4} \left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t \right]_0^{\operatorname{Ln}(1+\sqrt{2})} \text{ et}$$

$$J_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} - \frac{1}{2(1+\sqrt{2})^2} + 2 \operatorname{Ln}(1+\sqrt{2}) \right)$$

3. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$

On a : $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 x^n (x-1) \sqrt{1+x^2} dx < 0$. La suite est donc décroissante et minorée par zéro, donc elle est convergente.

- Déterminer la limite de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ si elle est convergente.

Soit $0 < \varepsilon < 1$ quelconque fixé, on a : $J_n = \int_0^{1-\varepsilon} f_n(x) dx + \int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x) dx$ et

$$0 < \int_0^{1-\varepsilon} f_n(x) dx \leq \sqrt{2} (1-\varepsilon)^{n+1} \text{ qui tend vers zéro quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

$$0 < \int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x) dx \leq \sqrt{2} \varepsilon. \text{ Par conséquent la suite tend vers zéro.}$$

Exercice n° 2

On considère dans R^3 , le plan P_a d'équation : $z = x + ay$, où a est un nombre réel quelconque.

1. Déterminer, dans la base canonique de R^3 , la matrice M_a de la projection orthogonale sur P_a .

La matrice M_a est diagonalisable et semblable à la matrice $\Delta_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base

formée d'une base de P_a , à savoir $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (0,1,a)$, et de son orthogonal, à savoir

$e_3 = (1,a,-1)$. La matrice de passage s'écrit $Q_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ et son inverse

$$Q_a^{-1} = \frac{-1}{2+a^2} \begin{pmatrix} -1-a^2 & a & -1 \\ a & -2 & -a \\ -1 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient :
$$M_a = Q_a \Delta_a Q_a^{-1} = \frac{1}{2+a^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & -a & 1 \\ -a & 2 & a \\ 1 & a & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

2. Calculer M_a^n pour tout entier n strictement positif.

Comme toute matrice de projection : $M_a^n = M_a$

3. Déterminer, dans la base canonique de R^3 , la matrice S_a de la symétrie orthogonale par rapport à P_a .

On procède comme pour la première question. La matrice semblable à S_a est

$$\Delta_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 (dans la même base) et
$$S_a = Q_a \Delta_s Q_a^{-1} = \frac{1}{2+a^2} \begin{pmatrix} a^2 & -2a & 2 \\ -2a & 2-a^2 & 2a \\ 2 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$$

4. Calculer le produit $M_a S_a$.

Il est évident géométriquement que $M_a S_a = M_a$

Exercice n° 3

Soient A et B deux matrices carrées de même ordre à coefficients réels.

1. Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB est inversible et dans ce cas, exprimer $(AB)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1}

a) Si A et B sont inversibles, on a : $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ et $B^{-1}B = BB^{-1} = I$. Puis

$$AB B^{-1} A^{-1} = A(B B^{-1}) A^{-1} = A I A^{-1} = A A^{-1} = I$$
, donc le produit est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

b) Réciproquement, si AB est inversible, alors il existe $\det(AB) = \det A \times \det B \neq 0$ et les deux déterminants sont non nuls, ce qui implique l'inversibilité de ces deux matrices.

2. Montrer que A est inversible si et seulement si A^p ($p \in N^*$) est inversible et dans ce cas, exprimer $(A^p)^{-1}$ en fonction de A^{-1} .

a) Supposons que A soit inversible, alors $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

On a : $A^p (A^{-1})^p = A^{p-1} (A A^{-1}) (A^{p-1})^{-1} = A^{p-1} I (A^{p-1})^{-1}$ et de proche en proche $AA^{-1} = I$, donc $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ (l'inverse d'une matrice étant unique).

b) Réciproquement, si A^p est inversible, alors $\det(A^p) = p \det A \neq 0$ et la matrice est inversible.

3. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
, où $\alpha \in R$

- Calculer A^n pour tout entier naturel n .

En utilisant les formules de trigonométrie, on obtient : $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par

réurrence on obtient : $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha & 0 \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculer (si elle existe) l'inverse de A .

On obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on peut vérifier que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

- Vérifier que $(A^n)^{-1}$ existe.

Si $(A^n)^{-1}$ existe, alors $(A^n)(A^n)^{-1} = I$ et on montre par récurrence que :

$$(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha & 0 \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 4

On définit une suite d'entiers naturels q_k ($k \in \mathbb{N}$) par $q_{k+1} = 2q_k + 1$ et $q_0 = 0$

1. Exprimer q_k en fonction de k .

On a $q_1 = 1; q_2 = 3; q_3 = 7$ et on vérifie par récurrence que $q_k = 2^k - 1$

2. On note $Q = \{q_k / k \in \mathbb{N}\}$ et on définit la suite (a_n) par :

$$a_0 = 1; a_{q_k} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k q_i}; a_n = 0 \text{ si } n \notin Q. \text{ Quelle est la nature des séries } \sum a_n \text{ et } \sum n a_n ?$$

On a $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{q_{k+1}}}{a_{q_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{q_{k+1} - q_k} - 1} = 0$ et d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum a_{q_k}$ converge

et donc $\sum a_n$ converge. Pour $k \geq 1$, $q_{k+1} - q_k = 2q_k + 1 - q_k = q_k + 1$ et donc la série $\sum n a_n$ converge.

3. Pour $x > 1$, calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{q_k} x^{q_k}$

$$\text{On a } \frac{a_{q_{k+1}} x^{q_{k+1}}}{a_{q_k} x^{q_k}} = \frac{1}{2^{q_{k+1} - q_k} - 1} x^{2^{k+1} - 2^k} \approx \frac{1}{2} \times \frac{x^{2^k}}{2^k} \rightarrow \infty, \text{ donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{q_k} x^{q_k} = +\infty$$

4. On considère la suite (p_n) définie par : $p_0 = p \in]0,1[$; $p_{n+1} = \sqrt{p_n}$. Etudier la convergence de la suite (p_n) .

La suite est positive et majorée par 1 et on a : $p_{n+1} - p_n = \sqrt{p_n}(\sqrt{p_n} - 1) > 0$, elle est donc croissante et par conséquent convergente vers une limite l solution de l'équation : $l = \sqrt{l}$, d'où $l=1$

5. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général : $v_n = \prod_{k=0}^n (1 + p_{k+1} - p_k)$

On a $(1 + p_{k+1} - p_k) \geq 1$, donc $\ln(1 + p_{k+1} - p_k) \geq 0$. La suite $(\ln v_n)$ est croissante.

Par ailleurs, $\ln(1 + p_{k+1} - p_k) \leq p_{k+1} - p_k$ et

$\ln \prod_0^n (1 + p_{k+1} - p_k) = \sum_0^n \ln(1 + p_{k+1} - p_k) \leq \sum_0^n (p_{k+1} - p_k) = p_{n+1} - p_0 \leq 1$. La suite $(\ln v_n)$ étant croissante et majorée, elle converge et il en est de même pour la suite (v_n) .

Exercice n° 5

Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n . On considère Q l'application numérique définie sur E_n par :

$$Q(p) = \int_{-1}^1 p^2(x)(1+x^2) dx$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique, dont la forme bilinéaire associée définit sur E_n un produit scalaire.

$\forall p, p_1 \in E_n, B(p, p_1) = \int_{-1}^1 p^2(x) p_1^2(x)(1+x^2) dx$ et B est bilinéaire symétrique car l'intégrale est linéaire. De plus :

$$\forall p \in E_n, B(p, p) = \int_{-1}^1 p^4(x)(1+x^2) dx \geq 0 \text{ et } B(p, p) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \quad \forall x \in [-1,1]$$

On a donc un produit scalaire.

2. Montrer qu'il existe une base orthogonale p_i ($i = 0,1,\dots,n$) de E_n telle que le terme de plus haut degré de p_i soit X^i .

On a $\dim E_n = n + 1$.

(p_i) est une base orthogonale si et seulement si $\forall i \neq j, B(p_i, p_j) = 0$.

On pose $p_0(x) = 1, p_1(x) = x$ (on vérifie aisément qu'ils sont orthogonaux pour ce produit

scalaire, en effet : $B(p_0, p_1) = \int_{-1}^1 x(1+x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0$

On cherche p_2 de la forme $p_2(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ avec

$B(p_0, p_2) = 0 \Rightarrow \beta = -2/5$ et $B(p_1, p_2) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, on obtient $p_2(x) = x^2 - \frac{2}{5}$.

On suppose p_0, \dots, p_{i-1} déterminés et on cherche p_i de la forme $p_i(x) = x^i + \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k p_k$ et

vérifiant : $B(p_i, p_k) = \int_{-1}^1 (x^i p_k(x) + \alpha_k p_k^2(x))(1+x^2) dx = 0, \forall k = 0, \dots, i-1$

Ceci donne une équation affine qui permet de déterminer les α_k de façon unique et donc p_i

3. Pour $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, on note F_i le sous espace de E_n engendré par les polynômes de degré strictement inférieur à i . Déterminer une base du sous espace F_i^\perp orthogonal à F_i

F_i admet comme base les polynômes $\{p_0, \dots, p_{i-1}\}$ et d'après la question précédente $\{p_i, \dots, p_n\}$ constituent une base de F_i^\perp

4. Montrer que $p_{i+2} - X p_{i+1}$ appartient à F_i^\perp . En déduire une relation entre p_{i+2}, p_{i+1}, p_i

$p_{i+2} - X p_{i+1} \in F_i^\perp \Leftrightarrow p_{i+2} - X p_{i+1} \perp p_k \forall k = 0, \dots, i-1$. Il suffit de vérifier que $X p_{i+1} \perp p_k$, car $p_{i+2} \in F_i^\perp$. On a : $B(X p_{i+1}, X^k) = \int_{-1}^1 x^{k+1} p_{i+1}(x)(1+x^2) dx \forall k = 0, \dots, i-1$ ou encore

$B(X p_{i+1}, X^k) = \int_{-1}^1 x^k p_{i+1}(x)(1+x^2) dx = 0, \forall k = 1, \dots, i$, ce qui implique

$p_{i+2} - X p_{i+1} = \lambda_0 p_i + \dots + \lambda_{n-i} p_n$. Comme p_{i+3}, \dots, p_n sont orthogonaux à p_{i+2} et $X p_i$, il s'ensuit que : $\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_{n-i} = 0$, donc $p_{i+2} - X p_{i+1} = \lambda_0 p_i + \lambda_1 p_{i+1} + \lambda_2 p_{i+2}$ et par identification, on obtient $\lambda_2 = 0$ et avec la parité $\lambda_1 = 0$;

En conclusion $p_{i+2} = X p_{i+1} + \lambda_0 p_i$

5. On suppose $n=2$.

- Ecrire la matrice M de la forme bilinéaire symétrique associée à Q dans E_2

On a :

$B(1, 1) = \int_{-1}^1 (1+x^2) dx = 8/3$

$B(x, x) = B(1, x^2) = \int_{-1}^1 (x^4 + x^2) dx = 16/15$

$B(x^2, x^2) = \int_{-1}^1 (x^4 + x^6) dx = 24/35$, par conséquent $M = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 2/5 & 0 & 9/35 \end{pmatrix}$

- La matrice M est-elle inversible ?

M étant une matrice symétrique définie positive, donc son déterminant est non nul et elle est inversible

- La matrice M est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de ses éventuelles valeurs propres ?
 Comme elle est symétrique, elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives (matrice définie positive).

6. Répondre à la question précédente dans le cas où $n=3$.

Il suffit simplement de compléter les calculs :

$B(1, x^3) = B(x^2, x^3) = 0$; $B(x, x^3) = B(x^2, x^2) = 24/35$; $B(x^3, x^3) = 32/63$, on en déduit la matrice N associée qui est inversible et diagonalisable :

$$N = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 16/15 & 0 \\ 0 & 16/15 & 0 & 24/35 \\ 16/15 & 0 & 24/35 & 0 \\ 0 & 24/35 & 0 & 32/63 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 6

1. Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$. Etudier les variations de g et tracer son graphe (on précisera ses extrema, ainsi que sa convexité). La fonction étant paire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble des réels positifs et son graphe sera symétrique par rapport à l'axe Oy. On a :

$$g'(x) = (-x^3 + 3x)e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ et } g''(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)e^{-x^2/2}$$

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$	-1 $2e^{-3/2}$	→	→ 0

La fonction admet donc 3 extrema en $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 3 = 0$ (équation bicarrée). On a 4 points d'inflexion dont les abscisses sont $x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$

2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$. On cherchera des solutions de la forme $y(x) = u(x)e^{-x^2/2}$

On a $y' = e^{-x^2/2}(u' - xu)$; $y'' = e^{-x^2/2}(u'' - 2xu' + (x^2 - 1)u)$ et en remplaçant dans l'équation différentielle proposée, on obtient : $u'' e^{-x^2/2} = 0$, soit $u'' = 0$ et $u(x) = ax + b$. Par conséquent $y(x) = (ax + b)e^{-x^2/2}$

3. On considère les fonctions numériques $f_{a,b}$ définies par $f_{a,b}(x) = (ax+b)e^{-x^2/2}$, où a et b sont deux nombres réels. On note $C_{a,b}$ leurs courbes représentatives. Montrer que pour a fixé non nul, les fonctions $f_{a,b}$ admettent des extrema et que les points correspondants à ces extrema sur $C_{a,b}$ appartiennent à un ensemble M_a . Représenter M_1 . Comment M_a se déduit de M_1 ?

On a $f'_{a,b}(x) = (-ax^2 - bx + a)e^{-x^2/2}$ et cette dérivée est nulle pour $ax^2 + bx - a = 0$ et comme $\Delta = b^2 + 4a^2 > 0$, on a deux racines réelles distinctes de signe contraire qui donnent des extrema à la fonction $f_{a,b}$ puisque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_{a,b}(x) = 0$ (le résultat est le même pour $a > 0$ ou

$a < 0$). Les points correspondants à ces extrema vérifient :

$$\begin{cases} y = (ax+b)e^{-x^2/2} \\ (-ax^2 - bx + a)e^{-x^2/2} = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par x et en additionnant, on obtient : $y = a \frac{e^{-x^2/2}}{x}$

Pour M_1 , on a : $y = \frac{e^{-x^2/2}}{x}$ et $y' = -\frac{(x^2+1)e^{-x^2/2}}{x^2} < 0$. La fonction est impaire, donc son graphe est symétrique par rapport à l'origine, la fonction est strictement décroissante de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ et les axes sont des asymptotes à la courbe. M_a se déduit de M_1 par homothétie.

4. Montrer que pour a fixé non nul, les courbes $C_{a,b}$ admettent trois points d'inflexion dont l'un est d'abscisse comprise entre -1 et 1.

La dérivée seconde de $f_{a,b}$ est $f''_{a,b}(x) = (ax^3 + bx^2 - 3ax - b)e^{-x^2/2}$. Etudions le signe du polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 - 3ax - b$. On a : $P(-1) = 2a$; $P(1) = -2a$. Ces deux valeurs sont de signe opposé. Le résultat sera le même pour $a > 0$ ou $a < 0$. Pour $a > 0$, le tableau des variations est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	$+$	$-$	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a bien 3 points d'inflexion.

5. Ces points d'inflexion appartiennent pour a fixé et b variable à un ensemble noté I_a . Représenter I_1 . Comment I_a se déduit de I_1 ?

Ces points d'inflexion vérifient :

$$\begin{cases} y = (ax+b)e^{-x^2/2} \\ (ax^3 + bx^2 - 3ax - b)e^{-x^2/2} = 0 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par $(x^2 - 1)$ et on soustrait les deux lignes pour obtenir :

$$(x^2 - 1)y = 2ax e^{-x^2/2}, \text{ à savoir } y = \frac{2ax e^{-x^2/2}}{(x^2 - 1)} \quad (x \neq \pm 1).$$

Pour $a=1$, $y = \frac{2x e^{-x^2/2}}{(x^2 - 1)} \quad (x \neq \pm 1)$ et $y' = \frac{-2(x^4 + 1)e^{-x^2/2}}{(x^2 - 1)^2} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante de $]-\infty, -1[$ sur R^- , de $]-1, 1[$ sur R et de $]1, +\infty[$ sur R^+ . Les axes $x=-1$ et $x=1$ sont des asymptotes verticales et l'axe Ox une asymptote horizontale.

I_a se déduit de I_1 par homothétie.