ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« Si tout est permis, rien n'est permis », Que pensez-vous de cette citation de Vladimir Jankélévich (1903-1986), philosophe français, tiré de son essai *L'Ironie* publié en 1950 ?

Sujet n° 2

Peut-on négocier la paix avec des criminels ? Vous argumenterez et illustrerez vos propos.

Sujet n° 3

« Migrations, émigrations, conquêtes, aucune portion de l'humanité n'est restée au lieu de son origine (…) nous sommes tous des exilés », que pensez-vous de cette citation de Barbara Cassin, philologue et membre de l'Académie française, tiré de son ouvrage *La nostalgie : quand donc est-on chez soi ?* paru en 2018 ?

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Soit d un entier égal à 1 ou 2. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_d$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ formé des fonctions continues.

Le but du problème est de chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}_2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x, y) = f(x + z, y + z), \qquad (T)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x, y) + f(y, z) = f(x, z), \qquad (A)$$

c'est-à-dire les fonctions continues invariantes par translation diagonale et additives au sens de (A).

Partie I - Étude de l'invariance par translation

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (T), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{T}_2$. Montrer que la fonction f vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, x) = f(y, y).$$

3. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_2$, la fonction $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} |f(x,y)| & si & x < y, \\ |f(y,x)| & si & x \geq y. \end{array} \right. \end{array}$$

est encore invariante par translation diagonale, c'est-à-dire $g \in \mathcal{T}_2$.

4. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccl} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(0,z) \end{array} \end{array}$$

définit un morphisme d'espace vectoriel.

5. Calculer le noyau $\mathcal{K}$ et l'image $\mathcal{I}$ du morphisme Φ.

6. Montrer que le morphisme Φ induit un isomorphisme linéaire du quotient $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sur $\mathcal{I}$. Calculer l'inverse Ψ de cet isomorphisme. Dans la définition de Ψ, on pourra identifier la fonction f à son représentant dans $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sans perte de généralité.

7. Soit a un nombre réel. Montrer que l'application

$$\Phi_a : \begin{array}{ccl} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z, a\, z) \end{array} \end{array}$$

définit un morphisme d'espace vectoriel quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

8. Lorsque $a \neq 1$, précisez si ce morphisme est injectif ou surjectif.

9. Montrer qu'il existe un réel a^* tel que $\mathrm{Im}(\Phi_{\mathrm{a}^*})$ est l'ensemble des fonctions constantes.

10. Quel est le noyau de Φ_{a^*} ?

Partie II - Étude de l'additivité.

11. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (A), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

12. Soit $f \in \mathcal{A}_2$. Montrer que la fonction f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,x) = 0.$$

13. On suppose que $f \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C}_2$. Montrer que la suite

$$S_N(f) = \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$$

converge quand $N \to +\infty$. Calculer sa limite.

14. On suppose que f est positive, montrer que la fonction f est croissante par rapport à chacune de ces variables.

Partie III - Étude des fonctions continues vérifiant (T) et (A).

Soit $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(0,1).$$
16. Montrer pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f\left(x, x + \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0,1).$$
17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(0,x) = x f(0,1)$.
18. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y-x) f(0,1)$.
19. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$, la suite suivante est convergente
$$S_N(g,f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) f\left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$$
20. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$, on a $S_N(g,f) \to f(0,1) \int_0^1 g(x)dx$ quand $N \to +\infty$.
21. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ on définit la quantité suivante pour tout $x \in [0,1]$
$$D_N(g)(x) = \sum_{k=0}^{2^N-1} \left(g((k+1)2^{-N}) - g(k2^{-N})\right) 2^N \mathbb{1}_{[k2^{-N},(k+1)2^{-N}[}(x).$$
Montrer que la fonction $D_N(g)$ est bornée sur $[0,1]$ uniformément par rapport à $N \in \mathbb{N}^*$.
22. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $D_N(g)(x) \to g'(x)$.
23. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$ non-nulle, calculer la limite de
$$I_N(g,f) = \sum_{k=0}^{2^N-1} g'\left(\frac{k}{2^N}\right) f\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right) / f(0,1)$$
en fonction de f et g.
24. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ la quantité
$$R_N(g,f) = \int_0^1 D_N(g)(x)dx - I_N(g,f).$$
converge vers 0 quand $N \to +\infty$.

2 Problème d'algèbre

L'objet du problème est l'étude des commutateurs de deux éléments dans les espaces vectoriels. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E.

Soient f et g deux endomorphismes de E, avec la notation $\circ$ pour définir la composition, on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc .}$$

et on définit $[f, g]$ le commutateur de f et g par la quantité

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de E noté en ligne, on note x^T sa transposée qui forme donc un vecteur colonne. Cette notation s'applique également à tout autre élément de E apparaissant dans la suite de l'énoncé. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

1. Soit une suite de réels $a_{2k} = 2^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $a_{2k+1} = 0$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

2. Soit une suite de complexes $a_k = \dfrac{(-i)^k (k+i)}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

3. Montrer que $[f, g]$ est un endomorphisme de E.

4. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une série entière donnée sans coefficient nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ par
$$P_k(X) = a_k X^k.$$
Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que si $[f,g] = \mathbf{0}_E$, il existe une suite $(b_{k,N})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
$$P_N(f+g) = \sum_{k=0}^{N} b_{k,N} P_k(f) \circ P_{N-k}(g)$$
5. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f,g] = \mathbf{0}_E$. Montrer que $b_{k,N} = 1$ pour tout k et pour tout $N \in \mathbb{N}$.
6. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f,g] \neq \mathbf{0}_E$. Montrer que $P_2(f+g) - \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P_k(f) \circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}[g,f]$.
7. Montrer que $F_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} P_k(f)$ converge quand N tend vers $+\infty$ vers un endomorphisme.

Partie II

8. Soit x un élément non nul de E et y un élément de E. Montrer qu'il existe au moins une matrice réelle M_0 de taille $n \times n$ tels que
$$M_0 \; x^T = y^T$$
9. Montrer que le choix de la matrice n'est pas unique si $n \geq 2$. C'est-à-dire qu'il existe au moins un élément $z \in E$ avec $z \neq \mathbf{0}_E$, et deux matrices réelles distinctes M et N de tailles $n \times n$ telles que
$$M z^T = N z^T.$$
10. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une matrice M de taille $n \times n$ telle que pour tout $y \in E$,
$$M y^T = f(y)^T.$$
11. Montrer que la matrice construite à la question précédente est unique. Pour chaque endomorphisme f de E, on notera alors M_f la matrice associée par la construction précédente.
12. Montrer que l'application
$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} (\text{Endomorphismes}(E), +, \circ) & \longrightarrow & (\text{Matrices réelles de taille } n \times n, +, \times) \\ f & \mapsto & \Phi(f) = M_f \end{array} \right.$$
est un morphisme d'anneau.
13. Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que
$$\Phi([f,g]) := M_{[f,g]} = M_f \times M_g - M_g \times M_f.$$

Partie III

Pour f un endomorphisme de E, on note C_f l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $M_{[f,g]}$ est la matrice identiquement nulle, c'est-à-dire

$$C_f := \{g : E \to E \text{ endomorphisme } : M_f \times M_g = M_g \times M_f\}.$$

14. Pour $f = \mathbf{id}_E$, montrer que $C_{\mathbf{id}_E}$ est constitué de l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$.
15. Montrer que C_f est un sous-groupe additif des matrices réelles de taille $n \times n$.
16. Montrer que C_f est un sous-anneau des matrices réelles de taille $n \times n$.
17. Montrer que C_f est un sous-espace vectoriel des matrices réelles de taille $n \times n$.
18. Soit D une matrice diagonale de taille 2×2 et d l'endomorphisme associé par la base canonique. Montrer que
$$d \in \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \mathcal{M}_{2,2},$$
et
$$d \notin \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}, b = c = 0 \right\}.$$
19. Soit f un endomorphisme dont la matrice M_f est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice de passage R et une matrice diagonale D telles que
$$M_f = R^{-1} D R$$
Montrer que si $g \in C_f$ et M_g est diagonalisable, alors il existe une matrice de passage Q, une matrice diagonale Δ et une matrice diagonale $\widetilde{D}$ telle que
$$M_g = Q^{-1} \Delta Q \quad \text{et} \quad M_f = Q^{-1} \widetilde{D} Q.$$
20. Montrer qu'il existe une matrice S telle que $\widetilde{D} = S^{-1} D S$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

1. Etudier la convexité de f.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Soit la fonction h définie sur R par : $h(x) = e^{-x} f(x)$. Calculer $I = \int_0^1 h(x)h(-x)\,dx$.

Exercice n° 2

Soit la fonction numérique f_α définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha + Ln(1+x^2)$, où α est un nombre réel quelconque et Ln désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer le domaine de définition de f_α selon les valeurs de α .
2. Etudier les variations et tracer les graphes de f_1 et f_2. Comparer ces deux graphes sur R^+.
3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f_1(u_n)$ et $u_0 > 0$.
4. Etudier la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = f_2(v_n)$ et $v_0 > 0$.
5. Pour $n \in N$, on pose : $I_n = \int_1^n f_n(x)\,dx$.

- Calculer I_2
- Etudier la suite (I_n)

Exercice n° 3

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où α et β sont des paramètres réels.

1. Etudier la diagonalisation de M selon les valeurs de α et β.

2. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.
Calculer, pour tout $n \in N$, M^n et $(M + I)^n$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

3. On suppose $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, \alpha - \beta \neq 1$, calculer M^n, pour tout $n \in N$.

Exercice n° 4

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $V = {}^tM\,M$, où ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice M.

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice V.

3. Trouver un vecteur unitaire u de R^3 tel que $V\,u = 2u$.

4. Déterminer la matrice (dans la base canonique) de la projection orthogonale, dans R^3, sur la droite vectorielle D engendrée par u.

5. Si chaque ligne de la matrice M correspond à une observation, quelle est l'observation dont la projection orthogonale sur D a la plus grande longueur ?

6. Déterminer les vecteurs propres de la matrice V.

7. Résoudre $Max \left\{ {}^t v V v \;/\; v \in R^3, \|v\| = 1 \right\}$.

Exercice n° 5

Pour $x \in R$, on considère l'intégrale généralisée : $K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\,dt$

1. Montrer que $K : x \mapsto K(x)$ définit une application de R dans R et étudier sa parité.

2. Pour $x>0$, calculer $K(x)$ en fonction de $K(1)$ que l'on ne cherchera pas à calculer et en déduire l'expression de $K(x)$ pour tout $x \in R$.

3. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2\,(1+t^2)}\,dt$

- Montrer que F est bien définie sur R.
- Trouver un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (on pourra comparer F et K).

4. Soit $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t\,x)}{t\,(1+t^2)}\,dt$

- Montrer que G est convergente.
- Pour $x, h \in R$, monter l'inégalité suivante : $\left|\sin^2(t(x+h)) - \sin^2(tx) - th\sin(2tx)\right| \leq h^2\,t^2$.
- Montrer que F est dérivable et que sa dérivée est égale à G.
- Montrer que G est continue.

Exercice n° 6

1. Soit $M : (a,b,c) \in C^3 \mapsto M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où C désigne l'ensemble des nombres complexes. Montrer que M est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre C^3 et $E = \{M(a,b,c)\ /\ (a,b,c) \in C^3\}$ et déterminer une base de E.

2. Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer U^n pour tout $n \in N$.

3. Calculer $M(a,b,c) \times M(a, jb, j^2c) \times M(a, j^2b, jc)$, où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$.

4. Déterminer, quand il existe, l'inverse de $M(a,b,c)$.

5. Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$. A quelle condition ces valeurs propres sont-elles distinctes ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après de Aboubacar Yacouba Barma, est un article publié dans « La Afrique Tribune » en mars 2017.

Il doit être résumé en 150 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

La Chine, ce partenaire presque comme les autres

C'est un proverbe chinois qui le dit : *« quand tout va bien, on peut compter sur les autres, quand tout va mal on ne peut compter que sur sa famille »*. Ce qui cadre bien, aujourd'hui, avec la dynamique sur laquelle surfent les relations entre l'Afrique et la Chine. En 2009, en pleine crise financière mondiale qui a surtout impacté les pays développés, la Chine s'est érigée en premier partenaire commercial de l'Afrique. En 2015 et alors que les pays occidentaux peinaient toujours à se relever des répercussions de la crise économique mondiale et que la croissance chinoise ralentissait, l'empire du milieu annonçait un nouveau programme financier en faveur du continent doté d'une enveloppe de 60 milliards de dollars sur trois ans.

L'effort est assez soutenu si l'on tient compte des difficultés qui affectent l'économie chinoise ces dernières années avec des inquiétudes sur l'effondrement des colossales réserves de change du pays. Ce qui risque d'imposer une baisse de régime aux investissements chinois en Afrique. Une mauvaise nouvelle pour bon nombre de pays africains, principalement les plus riches en ressources naturelles, qui ont développé durant la dernière décennie, une forte dépendance à la demande chinoise. Mais comme le rappelle, encore, un autre proverbe chinois, *« dans la sécheresse on découvre les bonnes sources et dans la détresse, les bons amis »*, les autorités chinoises n'entendent point baisser la voilure et veulent maintenir intact le partenariat construit en moins de deux décennies avec l'Afrique.

C'est d'ailleurs la teneur du message adressé aux présidents africains par leur homologue chinois, Xi Jinping, lors de la dernière édition du Forum de coopération Afrique-Chine (FOCAC) qui s'est tenue en décembre 2015 à Johannesburg et au cours de laquelle, les engagements de la Chine en Afrique pour les prochaines années ont été dévoilés. Cette approche chinoise qui consiste à se porter toujours au secours des économies africaines en pleine expansion, en fait toute la particularité. On se rappelle d'ailleurs que c'est au moment où l'Afrique était presque délaissée, surtout par les anciennes puissances coloniales et les institutions financières internationales, que la Chine s'est invitée sur le continent. Une mise gagnante puisque cette entrée en force de la Chine en Afrique est intervenue presqu'au moment où les pays africains amorçaient leurs cycles des « trente glorieuses », avec une dynamique de croissance sans précédent, laquelle a remis à jour tout le potentiel dont recèle le continent en matière d'opportunités économiques. La dynamique de la décennie 2000 à 2010 a d'ailleurs été fortement soutenue par la Chine qui en plus des investissements massifs dans plusieurs pays a parallèlement renforcé son influence diplomatique et sa présence économique directe en Afrique. Seuls les chiffres permettent de mesurer l'ampleur désormais prise par les relations économiques et commerciales sino-africaines. En plus de la série des annulations des dettes et de l'engagement financier à hauteur de 20 milliards de dollars déjà promis en 2012 et concrétisé depuis (à la suite des 5 milliards engagés dans les années 2000), les échanges commerciaux entre la Chine et l'Afrique ont cru de manière vertigineuse. De 10 milliards de dollars en 2000, le commerce Chine-Afrique a franchi le cap des 200 milliards en 2014 alors que les investissements chinois sur le continent ont dépassé les 30 milliards de dollars.

En 2016, l'empire du milieu représentait 10% des relations économiques de l'Afrique alors que la part des échanges commerciaux entre les pays du continent et la Chine a progressé de moins de 4% à plus de 20% sur les 15 premières années du nouveau millénaire. Il est projeté qu'à l'horizon 2020, la valeur du commerce Chine-Afrique, dépasse le cap des 400 milliards, ce qui conforterait la place de premier partenaire stratégique de l'économie africaine que s'arroge désormais la deuxième économie du monde.

Partenariat gagnant-gagnant

Le partenariat gagnant-gagnant qu'offre la Chine à l'Afrique ne devrait toutefois pas, occulter certains aspects qui reflètent une image assez négative, celle d'un « néo-colonialisme déguisé ». Il y a quelques années déjà, l'ancien gouverneur de la Banque centrale du Nigéria, Sanussi Lamido, avait mis en garde les responsables africains contre les effets pervers de l'offensive chinoise sur les ressources naturelles africaines. L'audience internationale qui a suivi cette sortie ressemble à bien des égards, et toute proportion gardée, à l'œuvre de l'économiste zambienne Dambisa Moyo, qui quelques années plus tôt, mettait en exergue les limites de l'aide publique internationale pour le développement en Afrique.

Si la dynamique des relations sino-africaines suscite aussi des critiques, elle sert aussi d'alternative aux pays africains surtout dans le nouveau contexte socioéconomique et politique des dernières années. Confrontés à une explosion des attentes sociales et un déficit criant en infrastructures, un handicap pour atteindre la croissance nécessaire à la prise en compte des défis contemporains, les responsables africains voient en la Chine un passage. Surtout à l'heure où l'aide internationale se fait de plus en plus rare et les marchés financiers de plus en plus exigeants en termes de critères pour accéder à certaines ressources, même au niveau des institutions financières ou des agences de développement. Ce n'est pas pour rien qu'aujourd'hui, Pékin est devenue une destination de premier choix pour les présidents africains tout comme l'a été à une certaine époque, et parfois bien plus, Paris ou Bruxelles à titre d'exemples.

Les capitales occidentales sont certes le passage obligé pour une reconnaissance internationale, alors Pékin est devenue l'étape privilégiée pour les dirigeants africains en quête de soutien pour financer les programmes de développement qu'ils ont élaboré. Et Pékin a su toujours se montrer généreuse, en échange de quelques contres parties. Un échange de bons procédés, financement contre matières premières qui représente un moindre mal pour beaucoup de chefs d'Etat africains qui misent avant tout sur leurs potentiels en ressources naturelles pour développer leurs économies.

Prometteuse « Chine-Afrique »

Aujourd'hui, la Chine s'impose comme le partenaire commercial par excellence du continent. Dans un contexte marqué par une rude concurrence pour l'accès aux marchés africains, que se livrent les anciennes puissances et les économies émergentes, la Chine a un statut des plus « particulier ». Tant par l'ampleur des échanges économiques mais aussi par les perspectives en matière de partenariat commercial surtout que les relations sino-africaines ont su jusque-là faire preuve d'adaptation à l'évolution de l'économie africaine.

Ce partenariat n'est certes pas exempt de critiques comme bien des analystes l'ont mis en exergue mais au final, il s'inscrit dans la même dynamique qui sous-tend l'expansion des autres partenaires intéressés par cette « niche africaine ». C'est ce qu'a d'ailleurs relevé la Banque africaine de développement (BAD) dans un rapport publié en 2011, alors que la dynamique sino-africaine soulevait encore beaucoup d'interrogations sur les réelles motivations de la Chine en Afrique et surtout les effets de sa stratégie de partenariat à l'égard des pays africains. Dans ce rapport intitulé : *«La Chine et l'Afrique : un nouveau partenariat pour le développement ?»*, la BAD qui a passé au crible les ressorts de ces relations, estime que *«les pratiques de la Chine en tant que prestataire d'aide et de financement du développement ne sont pas aussi différentes de celles des autres donateurs qu'on le pense habituellement»*, et d'étayer *«la marge d'amélioration est conséquente pour l'ensemble des acteurs du système mondial d'aide et de financement du développement»*. Consciente des critiques abondantes dont elle fait l'objet, la Chine essaie tant bien que mal d'adapter sa stratégie africaine tout en veillant à ne pas occulter les ingrédients qui ont fait le succès de sa recette.

De l'approche première qui a été schématisé par une sorte de troc des temps modernes, « soutien financier contre matières premières », la Chine est en train de se greffer comme un acteur majeur des perspectives d'évolution de l'économie africaine et de partenaire de développement. Les nouvelles niches sur lesquelles misent les investisseurs chinois, portés par une ambition politique au plus haut sommet de l'Etat, dans de nouveaux créneaux comme les services, l'agriculture et l'industrie, témoignent d'une forte volonté du pays de s'implanter durablement en Afrique. A cela s'ajoute une stratégie d'influence tout azimut avec toujours ce même *« soft power »* qui constitue la marque de fabrique de la Chine, celui de la non-ingérence dans les affaires intérieures des pays africains et des contributions financières sans conditions. Cela, même lorsque le pays s'ouvre sur de nouveaux créneaux comme la lutte contre les menaces sécuritaires, l'aide humanitaire ou le maintien de la paix sur le continent. C'est peut-être une manière prudente et prospective pour le pays qui ambitionne de se hisser au rang de première puissance mondiale, d'anticiper sur le futur en consolidant d'une part son influence sur le continent et aussi et surtout d'autre part, de sécuriser ses sources d'approvisionnements en matières premières tout autant que ses débouchés commerciaux.

Dans un cas comme dans l'autre, le renforcement du positionnement de la Chine en Afrique a de quoi augurer d'opportunités de croissance pour les pays du continent qui sauront le mieux se positionner. C'est d'ailleurs cette perspective de développement des pays africains et surtout de leur plus grande intégration dans les chaines de valeurs mondiales, qui apportera un nouveau souffle dans les relations entre le continent et ses multiples partenaires. A ce jeu, force est d'avouer que pour l'heure, c'est la *ChinAfrique* qui bénéficie des meilleures côtes...

Par Aboubacar Yacouba Barma

« La Afrique Tribune », mars 2017

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Soit d un entier égal à 1 ou 2. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_d$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ formé des fonctions continues.

Le but du problème est de chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}_2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x,y) = f(x+z, y+z), \qquad (T)$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x,y) + f(y,z) = f(x,z), \qquad (A)$$

c'est-à-dire les fonctions continues invariantes par translation diagonale et additives au sens de (A).

Partie I - Étude de l'invariance par translation

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ qui vérifient (T), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f, g \in \mathcal{T}_2$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

   $$(\lambda f+g)(x,y) = \lambda f(x,y)+g(x,y) = \lambda f(x+z,y+z)+g(x+z,y+z) = (\lambda f+g)(x+z,y+z).$$

   De plus cet ensemble est non vide, car il contient la fonction identiquement nulle.

2. Soit $f \in \mathcal{T}_2$. Montrer que la fonction f vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,x) = f(y,y).$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors en posant $z = y - x$ on obtient

$$f(x,x) = f(x + (y-x), x + (y-x)) = f(y,y).$$

3. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_2$, la fonction $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} |f(x,y)| & si \quad x < y, \\ |f(y,x)| & si \quad x \geq y. \end{array} \right. \end{array}$$

est encore invariante par translation diagonale, c'est-à-dire $g \in \mathcal{T}_2$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et soit $z \in \mathbb{R}$. Si $x < y$ alors on a

$$g(x,y) = |f(x,y)| = |f(x+z, y+z)| = g(x+z, y+z)$$

car $x+z < y+z$. Si $x \geq y$, on applique le même calcul. On remarque que les valeurs absolues ne perturbent aucunement le calcul.

4. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(0,z) \end{array} \end{array}$$

définit un morphisme d'espace vectoriel.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit f et $g \in \mathcal{T}_2$, soit $z \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\Phi(\lambda f + g)(z) = (\lambda f + g)(0,z) = \lambda f(0,z) + g(0,z) = \lambda \Phi(f)(z) + \Phi(g)(z).$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a bien $\Phi(\lambda f + g) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$.

5. Calculer le noyau $\mathcal{K}$ et l'image $\mathcal{I}$ du morphisme Φ.
Le noyau $\mathcal{K}$ est l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{T}_2$ telles que $f(0,z) = 0$ quelque soit le réel z. Or $f(0,z) = f(x, z+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la fonction f vérifie qu'elle est identiquement nulle sur toutes les droites $D_z : y = z + x$. Or ces droites recouvrent tout le plan $\mathbb{R}^2$, donc f est identiquement nulle. Le noyau est réduit à l'élément nul.
Soit maintenant h une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors on pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h(y-x) \end{array}$$

alors pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $f(x+z, y+z) = h(y+z-(x+z)) = h(y-x) = f(x,y)$ donc $f \in \mathcal{T}_2$. Donc $\Phi(f) = h$, et Φ est surjectif. L'image de Φ est $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

6. Montrer que le morphisme Φ induit un isomorphisme linéaire du quotient $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sur $\mathcal{I}$. Calculer l'inverse Ψ de cet isomorphisme. Dans la définition de Ψ, on pourra identifier la fonction f à son représentant dans $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sans perte de généralité.

   La construction est naturelle. Comme Φ était déjà un isomorphisme, sa réciproque est évidemment

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \to & \mathcal{T}_2/\mathcal{K} \\ h & \mapsto & f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h(y-x). \end{array} \end{array}$$

   La question reste toutefois indépendante de la question précédente, car on peut trouver la réciproque sans avoir exhibé le noyau ou l'image. En effet pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\Psi(h)(x,y) = \Psi(h)(0,y-x)$ par (T) et $\Psi(h)(0,y-x) = \Phi(\Psi(h))(y-x) = h(y-x)$.

7. Soit a un nombre réel. Montrer que l'application

$$\Phi_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z, a\,z) \end{array} \end{array}$$

   définit un morphisme d'espace vectoriel quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

   La démonstration est semblable à la question 4.

8. Lorsque $a \neq 1$, précisez si ce morphisme est injectif ou surjectif. Si $a = 0$ alors à symétrie près, c'est l'isomorphisme précédent. Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors soit f dans le noyau, on a $f(z, az) = f(0, (a-1)z)$ quelque soit le réel z, donc f est nulle sur l'axe des ordonnées et invariante par translation, donc elle est nulle partout et c'est encore un morphisme injectif. Il est également surjectif car sa réciproque est donnée par

$$\Psi_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{T}_2 \\ h & \mapsto & f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h\left(\dfrac{y-x}{a-1}\right). \end{array} \end{array}$$

   En effet pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\Psi_a(h)(x+z, y+z) = h\left(\frac{y+z-(x-z)}{a-1}\right) = h\left(\frac{y-x}{a-1}\right) = \Psi_a(h)(x,y),$$

   donc $\Psi_a(h) \in \mathcal{T}_2$. Et on a bien pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Psi_a(\Phi_a(f))(x,y) &= \Phi_a(f)\left(\frac{y-x}{a-1}\right) = f\left(\frac{y-x}{a-1}, a\frac{y-x}{a-1}\right) \\ &= f\left(\frac{y-x}{a-1} - \frac{y-x}{a-1} + x, a\frac{y-x}{a-1} - \frac{y-x}{a-1} + x\right) \\ &= f\left(x, \frac{ay-ax-y+x+x(a-1)}{a-1}\right) \\ &= f\left(x, \frac{ay-ax-y+x+x(a-1)}{a-1}\right) = f(x,y). \end{aligned}$$

9. Montrer qu'il existe un réel a^* tel que $\mathrm{Im}(\Phi_{a^*})$ est l'ensemble des fonctions constantes.
   Si $a = 1$, on voit que $f(z,z) = f(0,0)$ par (T) donc $\Phi_1(f)(z) = f(z,z) = f(0,0)$ est une constante pour tout $z \in \mathbb{R}$. Donc l'image du morphisme est l'ensemble des fonctions constantes. Le a^* recherché est $a^* = 1$.
10. Quel est le noyau de Φ_{a^*} ?
   Le noyau est l'ensemble des fonctions f telles que $f(0,0) = 0$. Par invariance par translation, ce sont donc les fonctions qui valent 0 sur la diagonale principale de $\mathbb{R}^2$.

Partie II - Étude de l'additivité.

11. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (A), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f, g \in \mathcal{A}_2$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a
   $$(\lambda f+g)(x,y)+(\lambda f+g)(y,z) = \lambda f(x,y)+\lambda f(y,z)+g(x,y)+g(y,z) = \lambda f(x,z)+g(x,z) = (\lambda f+g)(x,z).$$
   De plus cet ensemble est non vide, car il contient la fonction identiquement nulle.
12. Soit $f \in \mathcal{A}_2$. Montrer que la fonction f vérifie
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,x) = 0.$$
   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,x)+f(x,y) = f(x,y)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x,x) = 0$.
13. On suppose que $f \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C}_2$. Montrer que la suite
   $$S_N(f) = \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$$
   converge quand $N \to +\infty$. Calculer sa limite.
   C'est une somme télescopique, donc $S_N(f) = f\left(\frac{1}{N+1}, 1\right)$ qui converge vers $f(0,1)$ car f est continue.
14. On suppose que f est positive, montrer que la fonction f est croissante par rapport à chacune de ces variables.
   Soient $(x,y,a,b) \in \mathbb{R}^4$ avec $a < x$ et $b < y$ alors
   $$f(x,y) = f(a,y) + f(x,a) \geq f(a,y) \quad \text{et} \quad f(x,y) = f(x,b) + f(b,y) \geq f(x,b)$$
   donc f est bien croissante par rapport à sa première et sa deuxième variable.

Partie III - Étude des fonctions continues vérifiant (T) et (A).

Soit $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(0,1).$$

Par additivité et translation

$$f(0,1) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}\right) = nf\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

16. Montrer pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f\left(x, x + \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0,1).$$

Par additivité et translation

$$f\left(x, x + \frac{m}{n}\right) = f\left(0, \frac{m}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}\right) = mf\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0,1).$$

17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(0,x) = xf(0,1)$.
Par continuité et densité de $\mathbb{Q}$, la question précédente montre que $f(0,x) = xf(0,1)$ pour les $x \geq 0$. Pour les $x < 0$, il faut utiliser $f(0,-y) = -f(0,y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

18. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y-x)f(0,1)$.
C'est évident par invariance par translation.

19. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$, la suite suivante est convergente

$$S_N(g,f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) f\left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$$

Avec le résultat précédent c'est

$$S_N(g,f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N} f(0,1)$$

puisque g est continue, elle est bornée sur $[0,1]$, d'où $|S_N(g,f)| \leq \|g\|_\infty |f(0,1)|$ et la série est même absolument convergente.

20. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$, on a $S_N(g,f) \to f(0,1)\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ quand $N \to +\infty$.
C'est une somme de Riemann. Précisément c'est la méthode des rectangles à gauche.

21. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ on définit la quantité suivante pour tout $x \in [0,1]$

$$D_N(g)(x) = \sum_{k=0}^{2^N-1} \left(g((k+1)2^{-N}) - g(k2^{-N})\right) 2^N \mathbb{1}_{[k2^{-N},(k+1)2^{-N}[}(x).$$

Montrer que la fonction $D_N(g)$ est bornée sur $[0,1]$ uniformément par rapport à $N \in \mathbb{N}^*$.
Au point $x \in [0,1]$, quel que soit $N \in \mathbb{N}^*$ la série n'est en fait constituée que d'un seul terme. L'unique terme de la série est l'accroissement de la fonction g autour du point x. Par le théorème des accroissements finis,

$$\left|\left(g((k+1)2^{-N}) - g(k2^{-N})\right) 2^N\right| \leq \sup_{x \in \left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right]} |g'(x)| \leq \|g'\|_{\infty,[0,1]}.$$

22. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $D_N(g)(x) \to g'(x)$.
Quel que soit x, et quel que soit $N \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $K_{x,N}$ tel que $x \in [K_{x,N}2^{-N}, (K_{x,N}+1)2^{-N}[$. Donc $D_N(g)(x) = \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N$. Avec

$$\begin{aligned}
& \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N - g'(x) \\
= & \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)\right) 2^N + \left(g(x) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N \\
= & \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)\right) 2^N + \left(g(x) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N \\
- & g'(x)((K_{x,N}+1)2^{-N} - x + x - K_{x,N}2^{-N})2^N \\
= & \left[g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x) - g'(x)((K_{x,N}+1)2^{-N} - x)\right] 2^N \\
- & \left[g(K_{x,N}2^{-N}) - g(x) - g'(x)(K_{x,N}2^{-N} - x)\right] 2^N \\
= & \left[\frac{g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)}{((K_{x,N}+1)2^{-N} - x)} - g'(x)\right] ((K_{x,N}+1) - x2^N) \\
- & \left[\frac{g(K_{x,N}2^{-N}) - g(x)}{(K_{x,N}2^{-N} - x)} - g'(x)\right] (K_{x,N} - x2^N)
\end{aligned}$$

Comme $|K_{x,N}2^{-N} - x| \leq 2^{-N}$ et $|(K_{x,N}+1)2^{-N} - x| \leq 2^{-N}$, on peut conclure en remarquant que chaque terme est similaire à un reste d'ordre 2 d'un développement de Taylor. Mais comme la fonction n'est pas deux fois dérivable, il faut préciser que $\left[\frac{g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)}{((K_{x,N}+1)2^{-N} - x)} - g'(x)\right]$ converge vers 0 et que $((K_{x,N}+1) - x2^N)$ est bornée par 1. Donc le produit tend vers 0. Le deuxième terme se traite de la même manière.

23. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$ non-nulle, calculer la limite de

$$I_N(g,f) = \sum_{k=0}^{2^N-1} g'\left(\frac{k}{2^N}\right) f\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right) / f(0,1)$$

en fonction de f et g.

Avec le résultat précédent c'est

$$I_N(g,f) = \sum_{k=0}^{2^N-1} g'\left(\frac{k}{2^N}\right)\frac{1}{2^N}$$

qui converge vers $\displaystyle\int_0^1 g'(x)dx = (g(1)-g(0))$.

24. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ la quantité

$$R_N(g,f) = \int_0^1 D_N(g)(x)dx - I_N(g,f).$$

converge vers 0 quand $N \to +\infty$.

En calculant l'intégrale de $D_N(g)$ on trouve une somme télescopique qui vaut $g(1)-g(0)$. Puisque $I_N(g,f)$ converge vers $g(1)-g(0)$, c'est évident.

2 Problème d'algèbre

L'objet du problème est l'étude des commutateurs de deux éléments dans les espaces vectoriels. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E.

Soient f et g deux endomorphismes de E, avec la notation $\circ$ pour définir la composition, on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f\circ f, \quad f^3 = f\circ f\circ f, \text{ etc .}$$

et on définit $[f,g]$ le commutateur de f et g par la quantité

$$[f,g] = f\circ g - g\circ f.$$

Pour $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un élément de E noté en ligne, on note x^T sa transposée qui forme donc un vecteur colonne. Cette notation s'applique également à tout autre élément de E apparaissant dans la suite de l'énoncé. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

1. Soit une suite de réels $a_{2k} = 2^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $a_{2k+1} = 0$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$
La série décrit $\dfrac{1}{1-(\sqrt{2}x)^2}$. On peut appliquer la règle de Cauchy. Le rayon vaut $1/\sqrt{2}$.

2. Soit une suite de complexes $a_k = \dfrac{(-i)^k(k+i)}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$
C'est un résultat classique. Par le critère de d'Alembert, le rayon est infini.

3. Montrer que $[f,g]$ est un endomorphisme de E.
Soient x et $y \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a
$$\begin{aligned}[f,g](x+\lambda y) &= f(g(x+\lambda y)) - g(f(x+\lambda y)) \\ &= f(g(x)) + \lambda f(g(y)) - g(f(x)) - \lambda g(f(y)) = [f,g](x) + \lambda [f,g](y).\end{aligned}$$

4. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une série entière donnée sans coefficient nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ par
$$P_k(X) = a_k X^k.$$
Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que si $[f,g] = \mathbf{0}_E$, il existe une suite $(b_{k,N})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
$$P_N(f+g) = \sum_{k=0}^{N} b_{k,N} P_k(f) \circ P_{N-k}(g)$$
$P_N(f+g) = a_N \displaystyle\sum_{k=0}^{N} C_N^k f^k \circ g^{N-k}$ donc $P_N(f+g) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_N C_N^k \frac{1}{a_k}\frac{1}{a_{N-k}} P_k(f) \circ P_{N-k}(g)$.

5. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f,g] = \mathbf{0}_E$. Montrer que $b_{k,N} = 1$ pour tout k et pour tout $N \in \mathbb{N}$.
Avec le calcul précédent
$$b_{k,N} = \frac{1}{N!}\frac{N!}{k!(N-k)!}k!(N-k)! = 1.$$

6. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f,g] \neq \mathbf{0}_E$. Montrer que $P_2(f+g) - \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P_k(f) \circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}[g,f]$.

   On a

   $P_2(f+g) = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f \circ g + \frac{1}{2}g \circ f + \frac{1}{2}g^2 = P_2(f) + \frac{1}{2}P_1(f) \circ P_1(g) + \frac{1}{2}P_1(g) \circ P_1(f) + P_2(g)$

   donc

$$P_2(f+g) - \sum_{k=0}^{2} P_k(f) \circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}P_1(g) \circ P_1(f) - \frac{1}{2}P_1(f) \circ P_1(g) = \frac{1}{2}[g,f].$$

7. Montrer que $F_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} P_k(f)$ converge quand N tend vers $+\infty$ vers un endomorphisme.

   La suite est de Cauchy. On choisit une norme sur $\mathcal{L}(E,E)$ qui soit multiplicative et on a

$$\|F_N(f) - F_{N+p}(f)\| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} a_k \|f^k\| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} a_k \|f\|^k$$

   qui est majoré par le reste d'une série absolument convergente (la fonction exponentielle).

Partie II

8. Soit x un élément non nul de E et y un élément de E. Montrer qu'il existe au moins une matrice réelle M_0 de taille $n \times n$ tels que

$$M_0 \; x^T = y^T$$

   Soit i un indice tel que $x_i \neq 0$ alors une matrice en colonne i avec des coefficients y_j/x_i convient.

9. Montrer que le choix de la matrice n'est pas unique si $n \geq 2$. C'est-à-dire qu'il existe au moins un élément $z \in E$ avec $z \neq \mathbf{0}_E$, et deux matrices réelles distinctes M et N de tailles $n \times n$ telles que

$$Mz^T = Nz^T.$$

   Prendre deux matrices M et N telles que $Ker(M-N)$ n'est pas réduit à l'élément nul. Par exemple pour tout $z \in E$ avec $z \neq \mathbf{0}_E$, les matrices $M = ||z||^2 \mathbf{id}_E$ et $N = z^T z$ conviennent.

10. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une matrice M de taille $n \times n$ telle que pour tout $y \in E$,

$$My^T = f(y)^T.$$

   C'est la matrice canonique de l'endomorphisme. Les questions précédentes tentent de tester le candidat sur l'ordre des quantificateurs.

11. Montrer que la matrice construite à la question précédente est unique. Pour chaque endomorphisme f de E, on notera alors M_f la matrice associée par la construction précédente.
   Soit M et N deux matrices qui conviennent alors pour tout $x \in \mathbb{E}$ $(M-N)x^T = 0$, donc $Ker(M-N) = E$. Par le théorème du rang, la matrice $M-N$ a donc pour image $\{0\}$, c'est donc bien la matrice nulle.

12. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{cases} (\text{Endomorphismes}(E), +, \circ) & \longrightarrow & (\text{Matrices réelles de taille } n \times n, +, \times) \\ f & \mapsto & \Phi(f) = M_f \end{cases}$$

est un morphisme d'anneau.

$\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$ et la question précédente.

13. Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

$$\Phi([f,g]) := M_{[f,g]} = M_f \times M_g - M_g \times M_f.$$

On utilise la question précédente sur le morphisme d'anneau.

Partie III

Pour f un endomorphisme de E, on note C_f l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $M_{[f,g]}$ est la matrice identiquement nulle, c'est-à-dire

$$C_f := \{g : E \to E \text{ endomorphisme } : M_f \times M_g = M_g \times M_f\}.$$

14. Pour $f = \mathbf{id}_E$, montrer que $C_{\mathbf{id}_E}$ est constitué de l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$.

Toute matrice commute avec l'identité.

15. Montrer que C_f est un sous-groupe additif des matrices réelles de taille $n \times n$.

Soient M et $N \in C_f$ alors $(M+N)M_f = MM_f + NM_f = M_fM + M_fN = M_f(M+N)$.

16. Montrer que C_f est un sous-anneau des matrices réelles de taille $n \times n$.

Soient M et $N \in C_f$ alors $(MN)M_f = MNM_f = MM_fN = M_fMN = M_f(MN)$.

17. Montrer que C_f est un sous-espace vectoriel des matrices réelles de taille $n \times n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $M, N \in C_f$ alors on a

$$(\lambda M + N)M_f = \lambda MM_f + NM_f = M_f(\lambda M + N)$$

18. Soit D une matrice diagonale de taille 2×2 et d l'endomorphisme associé par la base canonique. Montrer que

$$d \in \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \mathcal{M}_{2,2},$$

et

$$d \notin \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}, b = c = 0 \right\}.$$

La première étape est la question 14 étendue à toutes les homothéties. La deuxième est un simple calcul.

19. Soit f un endomorphisme dont la matrice M_f est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice de passage R et une matrice diagonale D telles que

$$M_f = R^{-1}DR$$

Montrer que si $g \in C_f$ et M_g est diagonalisable, alors il existe une matrice de passage Q, une matrice diagonale Δ et une matrice diagonale $\widetilde{D}$ telle que

$$M_g = Q^{-1} \Delta Q \quad \text{et} \quad M_f = Q^{-1} \widetilde{D} Q.$$

C'est la codiagonalisabilité.

20. Montrer qu'il existe une matrice S telle que $\widetilde{D} = S^{-1} D S$.

Les deux matrices diagonales possèdent les mêmes valeurs propres. Donc il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ qui passe de l'ensemble $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ vers l'ensemble $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \cdots, \tilde{d}_n)$ avec $\tilde{d}_i = d_{\sigma(i)}$. On note S la matrice associée à cette permutation alors $Se_i = e_{\sigma(i)}$. On a donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$S\widetilde{D}e_i = S\tilde{d}_i e_i = \tilde{d}_i e_{\sigma(i)} = d_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = De_{\sigma(i)} = DSe_i.$$

Donc les matrices $S\widetilde{D}$ et DS sont égales sur la base $(e_1, e_2, \cdots e_n)$ donc elles sont égales.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

1. Etudier la convexité de *f*.

Comme la fonction est deux fois dérivables, la convexité est liée au signe de sa dérivée seconde.

On obtient $f''(x) = \dfrac{e^x(1-x)(-x^3+3x^2-5x-1)}{(1+x^2)^3}$. Soit $z = -x^3+3x^2-5x-1$, on a : $z' = -3x^2+6x-5 < 0$. La fonction z est donc strictement décroissante de R dans R, avec $z(-1) > 0$ et $z(0) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists! \alpha \in \left]-1,0\right[\ / \ z(\alpha) = 0$.
La dérivée seconde de *f* s'annule donc pour α et 1.
En conclusion, *f* est convexe pour $x > 1$ et $x < \alpha$, concave entre ces deux valeurs.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La dérivée de *f* est égale à : $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2 e^x}{(1+x^2)^2} > 0$. On a toujours $f' > 0$ et $f'(1) = 0$. La fonction est donc strictement croissante de R sur R^{+*}, avec une branche parabolique dans la direction verticale en $+\infty$ et avec l'axe horizontal comme asymptote à $-\infty$. Son graphe admet une tangente horizontale en 1.

3. Soit la fonction h définie sur R par : $h(x) = e^{-x} f(x)$. Calculer $I = \int_0^1 h(x)h(-x)\,dx$

On a : $I = \int_0^1 h(x)h(-x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}dx = [Arctg\ x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

D'où $I = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx = J - \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}.x\,dx$. Puis on intègre par parties cette dernière intégrale pour obtenir : $I = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{-x/2}{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}J = \frac{\pi+2}{8}$

Exercice n° 2

Soit la fonction numérique f_α définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha + Ln(1+x^2)$, où α est un nombre réel quelconque et Ln désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer le domaine de définition de f_α selon les valeurs de α .
Si $\alpha \in N, Df_\alpha = R$,
Si $\alpha \in Z^-, Df_\alpha = R^*$,
Si $\alpha \notin Z, Df_\alpha = R^{+*}$, (on rappelle que $x^\alpha = e^{\alpha Ln\,x}$)

2. Etudier les variations et tracer les graphes de f_1 et f_2. Comparer ces deux graphes sur R^+.
La fonction f_1 est strictement croissante de R sur R avec $f_1(0) = 0$ et une branche parabolique dans la direction verticale. On a : $f_1'(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$
La fonction f_2 est paire et strictement croissante de R^+ sur R^+ avec $f_2(0) = 0$ et une branche parabolique dans la direction verticale. On a : $f_2'(x) = \frac{2x(2+x^2)}{1+x^2}$
Sur R^+, $f_2(x) \geq f_1(x) \Leftrightarrow x(x-1) \Leftrightarrow x \geq 1$. Entre 0 et 1, c'est l'inverse.

3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f_1(u_n)$ et $u_0 > 0$
Si la suite (u_n) converge vers une limite finie *l*, alors cette limite doit vérifier $l = l + Ln(1+l^2)$ d'où *l*=0. Mais on a : $u_{n+1} = f_1(u_n) > u_n > 0$ ($f_1(x) \geq x$). La suite ne peut donc converger vers 0 et elle tend vers $+\infty$.

4. Etudier la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = f_2(v_n)$ et $v_0 > 0$
La suite (v_n) vérifie $v_{n+1} = v_n^2 + Ln(1+v_n^2)$ et cette suite est toujours strictement positive.
Si $(v_n) \to l$, alors $l = l^2 + Ln(1+l^2)$. Zéro est une racine évidente de cette équation.
Soit $u = x^2 - x + Ln(1+x^2)$, sa dérivée est égale à $u' = 2x - 1 + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x^3 - x^2 + 4x - 1}{1+x^2}$ et elle est du signe du numérateur, noté *nu*, dont la dérivée est strictement positive. Et *nu* est négatif en zéro et positif en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $l_1 \in]0,1[$ qui annule *nu*. Donc il existe $l_2 \in]l_1, 1[$ tel que $f_2(l_2) = l_2$.
Comme f_2 est convexe, son graphe est en dessous de la bissectrice entre 0 et l_2, et au-dessus pour $x > l_2$. Par conséquent, si $v_0 < l_2$, la suite (v_n) est décroissante, car $v_{n+1} = f_2(v_n) < v_n$ et elle est minorée par 0, donc elle converge vers 0.

Si $v_0 > l_2$, la suite (v_n) est croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.
Si $v_0 = l_2$, la suite (v_n) est stationnaire.

5. Pour $n \in N$, on pose : $I_n = \int_1^n f_n(x)\,dx$

- Calculer I_2
- Etudier la suite (I_n)

Calculons directement I_n.

$$I_n = \int_1^n x^n + Ln(1+x^2)\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^n + \left[x\,Ln(1+x^2)\right]_1^n - \int_1^n \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$I_n = \frac{n^{n+1}-1}{n+1} + n\,Ln(1+n^2) - Ln\,2 - 2(n-1) + 2\,(Arctg\,n - \frac{\pi}{4})$$

D'où $I_2 = \frac{1}{3} + Ln(\frac{25}{2}) + 2\,(Artg\,2 - \frac{\pi}{4})$ et

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}(n^n + 2n\,Ln\,n) = +\infty$$

Exercice n° 3

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où α et β sont des paramètres réels.

1. Etudier la diagonalisation de M selon les valeurs de α et β.

On a : $\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(\alpha - \lambda - \beta)(\alpha - \lambda + \beta)$, la matrice admet donc trois valeurs propres réelles : 1, $(\alpha - \beta), (\alpha + \beta)$. Cette matrice est trigonalisable dans tous les cas et la diagonalisation va dépendre de l'ordre de multiplicité des valeurs propres et de la dimension des sous espaces propres associés.

- Cas 1 : 3 valeurs propres confondues

Dans ce cas : $1 = (\alpha - \beta) = (\alpha + \beta)$, d'où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. La dimension du sous espace propre étant égale à deux, la matrice n'est pas diagonalisable.

- Cas 2 : 3 valeurs propres distinctes

Dans ce cas la matrice est diagonalisable avec $1 \neq (\alpha - \beta); 1 \neq (\alpha + \beta); (\alpha - \beta) \neq (\alpha + \beta)$, c'est à dire $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$.

- Cas 3 : Seulement deux valeurs propres identiques

a) $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta \neq 1$ (1 valeur propre double) et le sous espace propre associé à 1 est engendré par le vecteur $(x, x, 0)$ de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.
b) $\alpha - \beta = 1$ et $\alpha + \beta \neq 1$, cas similaire au précédent et la matrice n'est pas diagonalisable.
c) $\alpha + \beta = \alpha - \beta \neq 1$, ce qui implique $\beta = 0$ et $\alpha \neq 1$, la dimension du sous espace propre associé à α est de dimension deux et la matrice est diagonalisable.

En conclusion M est diagonalisable si et seulement si les trois valeurs propres sont distinctes ou si ($\alpha \neq 1, \beta = 0$).

2. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

Calculer, pour tout $n \in N$, M^n et $(M + I)^n$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

On vérifie par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comme $M\,I = I\,M$, on a : $(M+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k M^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} C_n^k & 0 & \sum_{k=0}^{n} k\,C_n^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} C_n^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} C_n^k \end{pmatrix}$

Par ailleurs, $(1+x)^n = \sum_k C_n^k x^k$ et pour x=1, $2^n = \sum_k C_n^k$

Soit $y = (1+x)^n = \sum_k C_n^k x^k$, alors $y' = n(1+x)^{n-1} = \sum_k k\,C_n^k x^{k-1}$ et pour x=1, $n\,2^{n-1} = \sum_k k\,C_n^k$

En conclusion : $(M+I)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

3. On suppose $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, \alpha - \beta \neq 1$

Calculer M^n, pour tout $n \in N$.

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable.

$\lambda = 1$ est une valeur propre double et le sous espace propre associé est engendré par $u_1 = (1,1,0)$

On cherche alors un vecteur u_2 tel que : $M\,u_2 = u_1 + u_2$ et la résolution du système suivant : $\begin{cases} \alpha\,x + \beta\,y + \alpha\,z = 1 + x \\ \beta\,x + \alpha\,y + \beta\,z = 1 + y \\ \qquad\quad z = z \end{cases}$ donne z=2 et $\beta\,x - \beta\,y = 1 - 2\beta$. On peut choisir $u_2 = ((1-2\beta)/\beta, 0, 2)$

Pour $\lambda = \alpha - \beta$, le sous espace propre associé est engendré par $u_3 = (1,-1,0)$, qui est bien orthogonal à u_1.

La matrice M est donc semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\beta \end{pmatrix}$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

On vérifie par récurrence que $J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\beta)^n \end{pmatrix}$. Par conséquent $M^n = P\,J^n\,P^{-1}$, où

P est la matrice de passage, à savoir $P = \begin{pmatrix} 1 & (1-2\beta)/\beta & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et sa matrice inverse est :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -(1-2\beta)/\beta \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -(1-2\beta)/\beta \end{pmatrix}$$

On obtient $M^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2(1-2\beta)^n & 2-2(1-2\beta)^n & 2n+\frac{1-2\beta}{\beta}-\frac{(1-2\beta)^{n+1}}{\beta} \\ 2-2(1-2\beta)^n & 2+2(1-2\beta)^n & 2n-\frac{1-2\beta}{\beta}+\frac{(1-2\beta)^{n+1}}{\beta} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice n° 4

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $V = {}^tM\,M$, où ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice *M*.

On obtient pour matrice de variance-covariance $V = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice *V*.

La matrice étant symétrique, elle est diagonalisable et $\det(V-\lambda I) = (2-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+2)$. Les trois valeurs propres sont : $2, 4 \pm \sqrt{14}$

3. Trouver un vecteur unitaire *u* de R^3 tel que $V\,u = 2\,u$

Le vecteur *u* sera donc un vecteur propre associé à la valeur propre 2, à savoir $u = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,1,3)$

4. Déterminer la matrice de la projection orthogonale, dans R^3, sur la droite vectorielle *D* engendrée par *u*.

La matrice de la projection orthogonale *P* est égale à : $P = u\ ({}^tu\,u)^{-1}\ {}^tu = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

5. Si chaque ligne de la matrice M correspond à une observation, quelle est l'observation dont la projection orthogonale sur D a la plus grande longueur ?

Notons a, b, c et d les 4 observations (lignes de la matrice M), on a $Pa = \frac{1}{10}(0,3,9)$; $Pb = \frac{1}{10}(0,-1,-3)$; $Pc = \frac{1}{10}(0,-3,-9)$; $Pd = \frac{1}{10}(0,1,3)$. Les projections de a et c sont opposées et ont la plus grande longueur.

6. Déterminer les vecteurs propres de la matrice V.

On sait déjà que u est un vecteur propre pour la valeur propre 2.

Pour $\lambda = 4+\sqrt{14}$, on doit résoudre le système suivant :

$\begin{cases} (2-\sqrt{14})\,x - 3\,y + z = 0 \\ -3\,x + (-2-\sqrt{14})\,y = 0 \\ x + (-2-\sqrt{14})\,z = 0 \end{cases}$ pour obtenir $y = \frac{-3\,x}{2+\sqrt{14}}$; $z = \frac{x}{2+\sqrt{14}}$. On peut choisir comme vecteur propre $u_2 = (2+\sqrt{14},-3,1)$.

De façon analogue pour $\lambda = 4-\sqrt{14}$, on peut choisir $u_3 = (-2+\sqrt{14},3,-1)$. On peut remarquer que ces vecteurs sont bien orthogonaux.

7. Résoudre $Max\ \left\{ {}^t v V\, v \ / v \in R^3, \|v\| = 1 \right\}$

En « normant » les vecteurs propres précédents, la matrice V est semblable à la matrice diagonale Δ dans le groupe orthogonal, où $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & 4-\sqrt{14} \end{pmatrix}$.

Par conséquent

$$Max\ \left\{ {}^t v V\, v \ / v \in R^3, \|v\| = 1 \right\} = Max\ \left\{ {}^t w \Delta\, w \ / w \in R^3, \|w\| = 1 \right\} = Max\ \left\{ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, w_i \ / \sum_{i=1}^{3} w_i^{\ 2} = 1 \right\}$$

Ce maximum est majoré par la plus grande valeur propre et ce maximum est atteint pour le vecteur propre associé à celle valeur, en conclusion : $Max\ \left\{ {}^t v V\, v \ / v \in R^3, \|v\| = 1 \right\} = 4+\sqrt{14}$

Exercice n° 5

Pour $x \in R$, on considère l'intégrale généralisée : $K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt$

1. Montrer que $K : x \mapsto K(x)$ définit une application de R dans R et étudier sa parité.

Pour $t \geq a > 0$, on a : $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc l'intégrale proposée converge en $+\infty$

Au voisinage de zéro, $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{t^2} \leq \frac{t^2 x^2}{t^2} = x^2$ et $\int_0^a x^2\, dt$ converge.

En conclusion, K est bien définie.
De plus, $K(-x) = K(x)$ et la fonction est paire.

2. Pour $x>0$, calculer $K(x)$ en fonction de $K(1)$ que l'on ne cherchera pas à calculer et en déduire l'expression de $K(x)$ pour tout $x \in R$.

On pose $u = tx$, d'où $K(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du = x K(1)$

Et avec la parité, pour $x \in R$, $K(x) = |x| K(1)$

3. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$.

- Montrer que F est bien définie sur R.
- Trouver un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (on pourra comparer F et K).

Pour $t \geq a > 0$, on a : $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} \leq \frac{1}{t^4}$, et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$ converge, donc l'intégrale proposée converge en $+\infty$.

Au voisinage de zéro, $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} \leq \frac{t^2 x^2}{t^2} = x^2$ et $\int_0^a x^2\, dt$ converge.

En conclusion, F est bien définie.

$F(x) - K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} \left(\frac{1}{1+t^2} - 1 \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-\sin^2(tx)}{1+t^2} dt$ et $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$, l'intégrale de cette majoration est égale à $\frac{\pi}{2}$, d'où $|F(x) - K(x)| \leq \frac{\pi}{2}$.

Pour $x \neq 0$, $K(x) = |x| K(1) \neq 0$, d'où $\left| \frac{F(x)}{K(x)} - 1 \right| \leq = \frac{|F(x) - K(x)|}{|x| K(1)} \leq \frac{\pi}{2K(1)} \cdot \frac{1}{|x|}$

En conclusion, au voisinage de $+\infty$, on a : $F(x) \approx x K(1)$ et au voisinage de $-\infty$, on a : $F(x) \approx -x K(1)$

4. Soit $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)} dt$

- Montrer que G est convergente.

On procède exactement de la même façon que pour les fonctions K et F.

- Pour $x, h \in R$, monter l'inégalité suivante : $\left|\sin^2(t(x+h)) - \sin^2(tx) - th\sin(2tx)\right| \leq h^2 t^2$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour une fonction deux fois continument dérivables :

$f(a+b) - f(a) - bf'(a) = \int_a^{a+b} (a+b-t) f''(t)\,dt$ que l'on applique à $f(x) = \sin^2(x)$ pour obtenir : $\sin^2(a+b) - \sin^2(a) - b\sin(2a) = 2\int_a^{a+b} (a+b-t)\cos(2t)\,dt$, d'où

$$\left|\sin^2(a+b) - \sin^2(a) - b\sin(2a)\right| \leq 2\left|\int_a^{a+b} (a+b-t)\cos(2t)\,dt\right|$$

Pour $b \geq 0$, $\left|\int_a^{a+b} (a+b-t)\cos(2t)\,dt\right| \leq \int_a^{a+b} (a+b-t)\,dt = \frac{b^2}{2}$

Pour $b < 0$, $\left|\int_a^{a+b} (a+b-t)\cos(2t)\,dt\right| \leq \int_{a+b}^{a} (t-a-b)\,dt = \frac{b^2}{2}$

Puis en posant Pour $a = tx$ et $b = th$, on obtient la relation demandée.

- Montrer que F est dérivable et que sa dérivée est égale à G.

On a :

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin^2(t(x+h)) - \sin^2(tx) - th\sin(2tx)}{ht^2(1+t^2)}\right| dt \leq |h| \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{|h|\pi}{2}$$

Et cette dernière expression tend vers zéro quand h tend vers zéro, la fonction F admet donc G comme dérivée.

- Montrer que G est continue.

On a : $G(x+h) - G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t(x+h)) - \sin(2tx)}{t(1+t^2)}\,dt$ et

$\sin(2t(x+h)) - \sin(2tx) = 2\sin(th)\cos(t(2x+h))$, d'où

$|G(x+h) - G(x)| \leq 2h\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)}\,dt \to 0$ quand $h \to 0$ et la fonction est continue.

Exercice n° 6

1. Soit $M : (a,b,c) \in C^3 \mapsto M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où C désigne l'ensemble des nombres complexes. Montrer que M est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre C^3 et $E = \{M(a,b,c) \;/\; (a,b,c) \in C^3\}$ et déterminer une base de E.

On vérifie aisément que l'application M est linéaire et bijective.

On a : $M(a,b,c) = aI + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aI + bU + cV$ et ces trois matrices sont indépendantes, donc elles forment une base de E.

2. Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer U^n pour tout $n \in N$

On calcule $U^2 = V$; $U^3 = VU = UV = 3I$; $U^4 = 3U$ et on vérifie par récurrence les résultats suivants : $U^{3n} = 3^n I$; $U^{3n+1} = 3^n U$; $U^{3n+2} = 3^n V$

3. Calculer $M(a,b,c) \times M(a, jb, j^2c) \times M(a, j^2b, jc)$, où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$.

On a : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $1 + j + j^2 = 0$; $j^3 = 1$. En utilisant ces résultats, on obtient :

$$M(a,b,c) \times M(a, jb, j^2c) \times M(a, j^2b, jc) = M(a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc, 0, 0) \in E$$

4. Déterminer, quand il existe, l'inverse de $M(a,b,c)$

On a : $\det M(a,b,c) = a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc$ (en développant, par exemple, par rapport à la troisième colonne ou par la règle de Sarrus). Si ce déterminant est non nul, on a (d'après la question précédente) : $M^{-1}(a,b,c) = \frac{1}{\det M(a,b,c)} M(a, jb, j^2c) \times M(a, j^2b, jc)$

5. Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$. A quelle condition ces valeurs propres sont-elles distinctes ?

On a : $\det\left(M(a,b,c) - \lambda I\right) = \det\left(M(a-\lambda, b, c)\right)$ et

$\det\left(M(a-\lambda,b,c)\right) = (a - \lambda + b\theta + c\theta^2)(a - \lambda + bj\theta + cj^2\theta^2)(a - \lambda + bj^2\theta + cj\theta^2)$, où $\theta = \sqrt[3]{3}$. Les trois valeurs propres sont donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 = a + b\theta + c\theta^2 \\ \lambda_2 = a + bj\theta + cj^2\theta^2 \\ \lambda_3 = a + bj^2\theta + cj\theta^2 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow b = c\, j^2\, \theta \\ \lambda_1 = \lambda_3 \Leftrightarrow b = c\, j\ \ \theta \\ \lambda_3 = \lambda_2 \Leftrightarrow b = c\ \theta \end{cases}$ et ces trois expressions donnent la même relation, à savoir : $b^3 = 3c^3$. En conclusion, ces valeurs propres sont distinctes si et seulement si : $b^3 \neq 3c^3$