AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

*

* *

PARTIE n° 1

❶ On a trivialement que $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$ et que $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ quel que soit λ appartenant à $\mathbb{R}$. Pour prouver la troisième propriété, on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$, ce qui implique bien que $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

❷ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$, ce qui implique bien que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

❸ ① $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]|x_j| \leq \max_{1\leq j\leq n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)$, et donc $\|A\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]$. Par ailleurs, en considérant $x \in \mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, excepté la composante j pour laquelle $\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]$ est maximal, on voit que $\|A\|_1 \geq \max_{1\leq j\leq n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]$; d'où l'égalité demandée.

② $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.\|x\|_\infty$, et donc $\|A\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$. Par ailleurs, en considérant $x \in \mathbb{R}^n$ tel que, si i atteint le maximum de $\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$, alors $x_j = \operatorname{sgn}(a_{ij})$, on voit que $\|A\|_\infty \geq \max_{1\leq i\leq n}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$; d'où l'égalité demandée.

❹ On a trivialement que $\|A\|_E = 0$ si et seulement si $A = 0$ et que $\|\lambda A\|_E = |\lambda| \|A\|_E$ quel que soit λ appartenant à $\mathbb{R}$. Pour prouver la troisième propriété, on se sert de l'inégalité de Minkowski, qui nous dit que : $\left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_{i,j}\left(a_{ij} + b_{ij}\right)^2\right)^{1/2}$.

Le coefficient à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de $A^t A$, que l'on note c_{ij}, est égal à $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$; par conséquent, $tr\left(A^t A\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i,k} a_{ki}^2$, d'où l'expression demandée.

Cette norme ne peut pas être subordonnée, parce que, si *I* désigne la matrice identité, on a trivialement : $\|I\|_E = \sqrt{n}$, alors que pour toute norme subordonnée, on doit avoir $\|I\| = 1$.

PARTIE n° 2

❶ Soit $x \in IR^n$ tel que $(A + \Delta A)x = 0$. On doit alors avoir : $x = -A^{-1}\Delta A x$. Mais, si $x \neq 0$, on aurait $\|A^{-1}\Delta A x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x\| < \|x\|$ ce qui implique une contradiction.

❷ ① x et Δx existent puisque A et $A + \Delta A$ sont inversibles.

② D'après la question 2 de la première partie, on doit avoir $\chi(A) \geq \|I\| = 1$.

③ On a $A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x = \Delta b$, ce qui implique : $\Delta x = A^{-1}(\Delta b - \Delta A x - \Delta A \Delta x)$. Par conséquent, $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \left(\|\Delta A\| \|\Delta x\| + \|\Delta A\| \|x\| + \|\Delta b\|\right)$. Puisque $Ax = b$, on doit avoir $\frac{\|A\| \|x\|}{\|b\|} \geq 1$. On a donc : $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \left(\|\Delta A\| \|\Delta x\| + \|\Delta A\| \|x\| + \frac{\|A\| \|x\|}{\|b\|} \|\Delta b\| \right)$; cette dernière expression est clairement équivalente à celle qui est demandée.

Fomesoutra.com ça soutra !

Cette inégalité permet de majorer l'erreur relative $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$, à partir des bornes relatives imposées a priori sur b et A. Plus $\dfrac{\chi(A)}{1-\chi(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$ est petit, plus l'erreur relative est faible. Or, pour $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ fixé, $\dfrac{\chi(A)}{1-\chi(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$ est une fonction croissante du coefficient de conditionnement de A. Il est donc préférable d'avoir une matrice au coefficient de conditionnement faible, et donc le plus proche de 1 possible.

PARTIE n° 3

❶ Les solutions sont $(1,1,1,1)$, $(9.2,-12.6,4.5,-1.1)$ et $(-81,137,-34,22)$ respectivement.

❷ Pour la norme $\|.\|_2$, on a $\|A\|_2 = 30.2887$, $\chi(A) = 2984$, $\|b\|_2 = 60.0249$, $\|x\|_2 = 2$. Dans le second système, on a $\|\Delta b\|_2 = 0.2$, $\|\Delta A\|_2 = 0$ et $\|\Delta x\|_2 = 16.3969$ (par rapport au premier système). On vérifie alors aisément la majoration demandée.