ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

Fomesoutra.com
ça soutra !

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Les trois parties sont très largement indépendantes.

Les candidats pourront admettre un résultat qu'ils n'auraient pas démontré à condition de le préciser explicitement.

Il sera tenu le grand compte de la rigueur et de la clarté du raisonnement.

Dans tout le problème :

n désigne un entier naturel strictement positif,

$x = \left(x_i\right)_{i\in(1,\ldots,n)}$ un élément de $\mathbb{R}^n$,

$\|.\|$ une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$,

$M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille (n,n), à coefficients réels, muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel réel,

$A = \left(\left(a_{ij}\right)\right)_{i,j\in(1,\ldots,n)}$ un élément de $M_n(\mathbb{R})$

A^t la matrice transposée de A,

et trA la trace de A

PARTIE n° 1

❶ On définit $\|.\|: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de la façon suivante : Fomesoutra.com ça soutra !

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\| = \inf \{\alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq \alpha \|x\| \quad (S)$$

Montrer que $(M_n(\mathbb{R}), \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Dans tout le reste du problème, on dira qu'une norme $N(.)$ de $M_n(\mathbb{R})$ est subordonnée si l'on peut trouver une norme $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $N(.)$ se construit à partir de $\|.\|$ en utilisant la formule (S). On dira aussi que $N(.)$ est subordonnée à $\|.\|$.

❷ Soit $\|.\|$ une norme subordonnée de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$$

❸ Soient $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ les trois normes de $\mathbb{R}^n$ définies par :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_1|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On note $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ les trois normes de $M_n(\mathbb{R})$ subordonnées à $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ respectivement

Montrer que :

① $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

② $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

❹ Montrer que l'application $\|\|.\|\|_E : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\|\|A\|\|_E = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Fomesoutra.com ça soutra !

munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace vectoriel normé.

Montrer que $\|\|A\|\|_E = \left(tr\left(A^t A\right)\right)^{1/2}$. Cette norme est-elle subordonnée ?

PARTIE n° 2

Dans toute cette partie, on suppose que A est inversible

Soit $\|\|.\|\|$ une norme de $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n$, et $\Delta A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\|\|\Delta A\|\| < \|\|A^{-1}\|\|^{-1}$.

❶ Montrer que $A + \Delta A$ est inversible.

❷ Soient b et Δb deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On définit x et $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$Ax = b \text{ et } (A + \Delta A)(x + \Delta x) = (b + \Delta b).$$

① Montrer l'existence et l'unicité de x et Δx.

② On définit : $x(A) = \|\|A\|\|.\|\|A^{-1}\|\|$.

On notera que $x(A)$ dépend à priori du choix de la norme subordonnée $\|\|.\|\|$.

$x(A)$ est appelé coefficient de conditionnement de la matrice A

Montrer que $x(A) \geq 1$

③ Montrer que $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \dfrac{x(A)}{1 - x(A)\|\|\Delta A\|\| / \|\|A\|\|} \left(\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \dfrac{\|\|\Delta A\|\|}{\|\|A\|\|} \right)$

Lorsque l'on cherche à résoudre numériquement le système $Ax = b$, le meilleur cas de figure est-il d'avoir une matrice au coefficient de conditionnement faible ou élevé ?

PARTIE n° 3

❶ Calculer, à 10^{-2} près, les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{array}{lllllllll}
10u_1 & + & 7u_2 & + & 8u_3 & + & 7u_4 & = & 32 \\
7u_1 & + & 5u_2 & + & 6u_3 & + & 5u_4 & = & 23 \\
8u_1 & + & 6u_2 & + & 10u_3 & + & 9u_4 & = & 33 \\
7u_1 & + & 5u_2 & + & 9u_3 & + & 10u_4 & = & 31
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
10v_1 & + & 7v_2 & + & 8v_3 & + & 7v_4 & = & 32{,}1 \\
7v_1 & + & 5v_2 & + & 6v_3 & + & 5v_4 & = & 22{,}9 \\
8v_1 & + & 6v_2 & + & 10v_3 & + & 9v_4 & = & 33{,}1 \\
7v_1 & + & 5v_2 & + & 9v_3 & + & 10v_4 & = & 30{,}9
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
10w_1 & + & 7w_2 & + & 8{,}1w_3 & + & 7{,}2w_4 & = & 32 \\
7{,}08w_1 & + & 5{,}04w_2 & + & 6w_3 & + & 5w_4 & = & 23 \\
8w_1 & + & 5{,}98w_2 & + & 9{,}89w_3 & + & 9w_4 & = & 33 \\
6{,}99w_1 & + & 4{,}99w_2 & + & 9w_3 & + & 9{,}98w_4 & = & 31
\end{array}$$

❷ Calculer $x(A), A$ étant la matrice de M_4 (ℝ) associée au premier système étudié dans la question précédente, lorsque l'on prend $\|.\|_2$ comme norme. Vérifier la majoration obtenue dans la question ❷ de la Partie 2 lorsque l'on considère le second système comme une perturbation du premier.