Concours CESD 1999

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

Première Partie

Quelques propriétés de cette approximation de Padé et quelques exemples.

1. Supposons tout d'abord qu'il existe une approximation de Padé d'ordre (p, q) donnée par les polynômes P et Q ; en multipliant par $Q(x)$ l'inégalité donnée par la condition (C2) nous obtenons :

$$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |Q(x)f(x) - P(x)| \leq M|Q(x)||x|^{p+q+1}.$$

La fonction polynôme $Q(x)$ est bornée sur $]-\alpha, \alpha[$, mettons par M', d'où :

$$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |Q(x)f(x) - P(x)| \leq MM'|x|^{p+q+1},$$

ce qui fournit (C3) à notation près.
Plus intéressant est la réciproque : partons de (C1), (C3). Avec les notations de l'énoncé, $Q(0) = 1$ d'où $\alpha' > 0$ tel que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-\alpha', \alpha'[$. Si $\beta = \min(-\alpha, \alpha')$, la fonction continue $1/Q(x)$ est bornée sur $]-\beta, \beta[$, mettons par M''. Il vient alors

$$\text{pour tout } x \in]-\beta, \beta[\text{ on a } |f(x) - P(x)/Q(x)| \leq MM''|x|^{p+q+1},$$

ce qui donne (C2).
Soit enfin une approximation de Padé donnée par les polynômes P et Q, la fonction $h(x) = Q(x)f(x) - P(x)$ est de classe C^∞ et vérifie $h(x) = O(x^{p+q+1})$. Par l'unicité des développements limités :

$$h(0) = h'(0) = \cdots = h^{p+q}(0) = 0.$$

D'autre part h est développable en série entière au voisinage de 0 - en effet, f et Q le sont, et il suffit de réorganiser le produit $f(x)Q(x)$ sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ où le développment converge absolument - la nullité des dérivées de h en 0 jusqu'à l'ordre $p + q$ montre que :

$$h(x) = \sum_{k \geq p+q+1} a_k x^k$$

pour $x \in]-\alpha, \alpha[$, avec a_k réels. D'où la conclusion avec $h(x) = \sum_{k \geq 0} a_{p+q+1+k} x^k$.

2. Donnons nous deux approximations de Padé de f à l'ordre (p,q), soit (P_0,Q_0) et (P_1,Q_1) ; par inégalité triangulaire et (C2) nous obtenons $\beta > 0, C > 0$ tels que :
$$\text{pour tout } x \in]-\beta,\beta[\text{ on a } \left|\frac{P_0(x)}{Q_0(x)} - \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right| \leq C|x|^{p+q+1}.$$
Q_0Q_1 étant bornée sur $]-\beta,\beta[$, il vient :
$$P_0Q_1 - P_1Q_0 = O(x^{p+q+1}).$$
$P_0Q_1 - P_1Q_0$ est un polynôme de degré $\leq p+q$; l'unicité des développements limités amène $P_0Q_1 - P_1Q_0 = 0$. Comme P_0/Q_0 et P_1/Q_1 sont irréductibles et $Q_0(0) = Q_1(0) = 1$, nous obtenons $(P_0,Q_0) = (P_1,Q_1)$.
3. Visiblement, $[p/0]_f = P/1$ avec $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p$.
4. Si P/Q est une approximation de Padé d'ordre (p,q), les fonctions de classe C^∞, f et P/Q, ont le même développement limité d'ordre $p+q$ en 0 puisque, g étant bornée au voisinage de 0
$$Q(x)f(x) - P(x) = O(x^{p+q+1}).$$
L'unicité du développement limité donne $f^{(k)}(0) = (P/Q)^k(0), k = 0,\ldots,p+q$. La réciproque est aussi simple.
5. Si une telle approximation de Padé existe elle prend la forme :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax+b}{cx+d},$$
dont le développement limité d'ordre 3 en 0 est :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = b + (a-bc)x + (bc^2 - ac)x^2 + O(x^3).$$
Il faut donc que $b = 1, a = c, bc^2 - ac = 1$, ce qui est impossible, puisque les premières deux équations entraînent $bc^2 - ac = 0$.
6. (a) Rappelons que la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ admet, pour $\alpha \notin \mathbb{N}$, un développement en série entière de rayon 1 en 0. De ce fait, $(1+x)^{1/2}$ et $(1+3x)^{-1/2}$ admettent des développements en série entière absolument convergents sur $]-1/3,1/3[$. On peut donc effectuer le produit et obtenir un développement de f en série entière $\sum b_nx^n$ sur $]-1/3,1/3[$. Sie le rayon R de ce développement est $> 1/3$, la somme $g(x)$ de $\sum b_nx^n$ possède une limite finie en -1/3+0, donc f aussi, ce qui est exclu. Enfin, les trois premiers termes du développement limité de f sont 1, $-x$ et $5x^2/2$.

   (b) Par des développements limités, compte-tenu de la forme que peuvent prendre les les approximants de Padé, on trouve
$$h_1 = 1 - x + 5x^2/2, h_2 = 1/(1+x), h_3 = \frac{3x+2}{5x+2}.$$

(c)

$$f - h_3(0,1) = 1,3310^{-4},$$
$$f - h_3(0,2) = 6,4110^{-4},$$
$$f - h_3(0,5) = 31,8110^{-4},$$
$$f - h_3(0,1) = 71,7810^{-4},$$
$$f - h_3(0,1) = 197,0110^{-4}.$$
$$h_1 - f(0,1) = 0,005133,$$
$$h_1 - f(0,2) = 0,033975$$
$$h_1 - f(0,5) = 0,350403,$$
$$h_1 - f(1) = 1,792893,$$
$$h_1 - f(0,1) = \text{beaucoup}.$$

Deuxième Partie

Approximation de Padé d'ordre $(p,1)$ de la fonction exponentielle.

1. Toujours par les mêmes méthodes, on trouve :
$$\frac{2+x}{2-x}.$$
2. On cherche donc $b \in \mathbb{R}^*$ et un polynôme P de degré $\leq p$ tels que :
$$(1+bx)(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!}+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+O(x^{p+2}))-P(x)=O(x^{p+2}).$$
Il faut déjà annuler le coefficient de x^{p+1}, donc $\frac{b}{p!}+\frac{1}{(p+1)!}=0$, soit $b=-\frac{1}{p+1}$. De là :
$$\begin{aligned} P(x) &= (1-\frac{x}{p+1})(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!})+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \\ &= 1+(\frac{1}{1!}-\frac{1}{p+1})+\cdots+(\frac{1}{p!}-\frac{1}{(p-1)!(p+1)})x^p. \end{aligned}$$
Choisissons une entier $N > x$. Alors pour tout $p \geq N$ on a:
$$(1-\frac{x}{p+1})R_p(x)=P(x)=(1-\frac{x}{p+1})(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!})+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!},$$
qui tend visiblement vers e^x lorsque p tend vers $+\infty$. Comme $\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$ et $1-\frac{x}{p+1}$ convergent uniformément vers 0 et 1 sur $[-A,A]$,
$$R_p(x)=(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!})+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!(1-\frac{x}{p+1})}$$

converge uniformément vers e^x pour $p \geq [A]+1$.

3. (a) On reprend les calculs ci-dessus :

$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!(1-\frac{x}{p+1}} - \sum_{k\geq p+1} \frac{x^k}{k!}.$$

Pour $|x| < p+1$ on a

$$\frac{1}{1-\frac{x}{p+1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(p+1)^k}$$

et

$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k\geq 1} (\frac{1}{(p+1)^k} - \frac{1}{(p+2)\dots(p+k+1)})x^{k-1},$$

donc $c_k := \frac{1}{(p+1)^{k+1}} - \frac{1}{(p+2)\dots(p+k+1)}$ conviennent. Enfin, le critère d'Alembert montre que le rayon de convergence de $\sum c_k x^k$ est $p+1$.

(b) Si $p > [A]+1$, le calcul ci-dessus montre que $R_p(x) - e^x$ est somme sur $[0, A]$ d'une série entière à coefficients positifs, d'où le premier point. La majoration demandée est alors issue du développement en série entière, par exemple :

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{A^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k\geq 1} (\frac{A}{p+1})^k,$$

d'où, pour tout $x \in [0, A]$ et $p \geq [A]+1$

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{1}{p+1} \frac{A^{p+1}}{(p+1)!} \frac{1}{1-\frac{A}{p+1}}.$$

(c) Ici $A = 1$, donc pour $p \geq 2$ et $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{1}{1-\frac{1}{p+1}} \frac{1}{p+1} \frac{x^{p+2}}{(p+1)!},$$

soit

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{x^{p+2}}{p(p+1)!} < e^x - S_p(x),$$

dès que $x > 0$. Donc $R_p(x)$ est plus proche que $S_p(x)$.