Concours CESD 1999

Epreuve de Calcul Numérique

Durée : 2 heures
Calculatrices permises

Soit f une fonction réelle égale à la somme d'une série entière de terme général $(a_n x^n)_{x \in \mathbb{N}}$; le rayon de convergence R est supposé strictement positif. Dans l'intervalle de convergence $]-R, R[$ la valeur de $f(x)$ est donc donnée par la relation :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Etant donné deux entiers naturels p et q, on dit que la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p, q) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(C1) Il existe deux polynômes réels P et Q de degré respectivement égal à p et à q tels que $Q(0) = 1$ et tels que la fraction rationnelle P/Q est irréductible.

(C2) Il existe deux réels α et M avec $0 < \alpha \leq R, M > 0$, tels que les trois fonctions f, P et Q aient la propriété :

$$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}| \leq M|x|^{p+q+1}.$$

Première Partie

Quelques propriétés de cette approximation de Padé et quelques exemples.

1. Démontrer que, pour que la fonction f admette une approximation de Padé d'ordre (p, q), il faut et il suffit que la condition (C1) ci-dessus et la condition (C3) ci-après soient satisfaites :

   (C3) Il existe deux réels α et M avec $0 < \alpha \leq R, M > 0$, tels que les trois fonctions f, P et Q aient la propriété :

   $$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |Q(x)f(x) - P(x)| \leq M|x|^{p+q+1}.$$

   En déduire que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p, q), il existe une fonction g somme d'une série entière telle que pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$ les fonctions f, P, Q et g vérifient la relation :

   $$Q(x)f(x) - P(x) = x^{p+q+1}g(x).$$

2. Démontrer que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p, q), les polynômes P et Q sont définis de manière unique. La fraction rationnelle P/Q sera désignée par le symbole $[p/q]_f$ et sera appelée approximation de Padé d'ordre (p, q) de f.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel p, la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre $(p, 0)$. Préciser $[p/0]_f$.
4. Soient P et Q deux polynômes de degré respectivement égal à p et à q tels que $Q(0) = 1$ et tels que la fraction rationnelle P/Q soit irréductible ; démontrer que, pour que la fraction rationnelle P/Q soit l'approximation de Padé d'ordre (p, q) de f, il faut et il suffit que les valeurs prises par la fraction rationnelle P/Q et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p+q$ en 0 soient égales respectivement aux valeurs prises par la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p + q$ en 0.
5. Supposons que la fonction f soit définie par la relation : $f(x) = 1 + x^2$. Existe-t-il une approximation de Padé d'ordre $(1, 1)$ de cette fonction f ?
6. Supposons que la fonction f soit définie par la relation :

   $$f(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 + 3x}}.$$

   (a) Démontrer l'existence d'un développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de 0 ; déterminer son rayon de convergence et ses trois premiers termes.

   (b) Calculer les approximations de Padé $h_1 := [2/0]_f$, $h_2 := [0/1]_f$ et $h_3 := [1/1]_f$.

(c) Dresser le tableau des valeurs prises par les fonctions $f - h_3$ et $h_1 - f$ à 10^{-6} près lorsque la variable prend les valeurs suivantes : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 et 10.

Deuxième Partie

Approximation de Padé d'ordre $(p, 1)$ de la fonction exponentielle.

1. Déterminer l'approximation de Padé d'ordre $(1, 1)$ de la fonction exponentielle
$$x \mapsto e^x.$$
2. Déterminer, pour tout entier $p \geq 2$ l'approximation de Padé d'ordre $(p, 1)$ de la fonction exponentielle. Soit R_p la fraction rationnelle obtenue. Préciser le plus grand intervalle ouvert centré en 0 dans lequel la fraction R_p est définie et continue. Démontrer que, pour tout réel x, il existe un entier N tel que la suite de réels $((R_p(x))_{p \geq N}$ soit convergente et de limite e^x.
Est-il possible de démontrer, de manière analogue, une convergence uniforme dans un intervalle $[-A, A]$, $A > 0$, vers la fonction exponentielle ?
3. (a) L'entier p étant fixé, déterminer un intervalle centré en 0 et une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels tels que la relation
$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$
ait lieu pour tout x de cet intervalle. Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général $c_k x^k$.
(b) Démontrer que, pour tout intervalle $[0, A]$, $A > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $p > N$ l'inégalité
$$e^x \leq R_p(x)$$
ait lieu pour tous $x \in [0, A]$. En déduire, sous ces hypothèses sur p et x, une majoration de la différence $R_p(x) - e^x$.
(c) Il sera admis que, p étant toujours un entier, si x est un réel compris entre 0 et $p + 1$, la différence entre e^x et la somme $S_p(x)$ des $p + 1$ premiers termes de son développement en série entière dans un voisinage de 0 vérifie la double inégalité :
$$\frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \leq e^x - S_p(x) \leq \frac{x^{p+1}}{p!(p+1-x)}.$$
Est-ce que, en supposant maintenant x compris entre 0 et 1, le réel $R_p(x)$ est plus proche de e^x que $S_p(x)$?