ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE I

a) f est continue, car composition des deux fonctions continues $x \mapsto \sin x$ et $t \mapsto |t|$. On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

donc *f* n'est pas dérivable en 0. La plus petite période est π.

b) $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k (x-\frac{\pi}{2})^{2k}$. Rayon de convergence infini. $I = [0,\pi]$.

c) Comme *f* est une fonction paire on a $b_1 = b_2 = \cdots = 0$. Les autres coefficients sont donnés par

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin x| \cos kx \mathrm{d}x.$$

En intégrant (deux fois) par parties on obtient

$$\int \sin x \cos kx \mathrm{d}x = \frac{\cos x \cos kx + k \sin x \sin kx}{k^2-1} + C, k \neq 1,$$

et

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{(\sin x)^2}{2} + C.$$

Ainsi on arrive à $a_k = 0$ pour *k* impair et $a_k = -\frac{4}{(k^2-1)\pi}$ pour *k* pair.

d) $T_4(\frac{\pi}{4}) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})^{2k} = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{1024} \approx 0{,}786700927.$

$$F_4(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{\cos\pi}{15}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{15\pi} \approx 0{,}721502408.$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707106781.$$

Donc F_4 est une meilleure approximation en $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE II

1) $\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0,$ car l'exponentielle croît plus vite que toute puissance.

$\lim_{t\to +\infty} F(t) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^5}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x^4}{e^x} = 0,$ d'après la règle de l'Hôpital.

F est continue, strictement positive et tend vers 0 aux bords de son domaine de définition. Elle possède donc un maximum.

2)
$F(0{,}05) \approx 0{,}01$
$F(0{,}1) \approx 4{,}54$
$F(0{,}15) \approx 16{,}78$
$F(0{,}2) \approx 21{,}20$
$F(0{,}25) \approx 19{,}1$
$F(0{,}3) \approx 15{,}2$
$F(0{,}4) \approx 8{,}7$
$F(0{,}5) \approx 5{,}0$
$F(0{,}6) \approx 3{,}00$
$F(0{,}7) \approx 1{,}87$
$F(0{,}8) \approx 1{,}22$
$F(0{,}9) \approx 0{,}83$
$F(1{,}0) \approx 0{,}58$

Il y a donc un maximum en $0{,}2 \pm 5\times 10^{-2}$.

3) *F* est dérivable, donc si *t* est maximum de *F* alors $F'(t)=0$.

$$F'(t)=-5t^{-6}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)^{-1}+t^{-5}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)^{-2}e^{\frac{1}{t}}t^{-2}=-t^{-7}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)^{-2}\left(5t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-e^{\frac{1}{t}}\right).$$

Donc $F'(t)=0$ si et seulement si $5t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-e^{\frac{1}{t}}=0.$

4) Avec $t=\frac{1}{x}$ l'équation $5t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-e^{\frac{1}{t}}=0,\ t>0,$ devient $5(e^{x}-1)-xe^{x}=0$ ou bien $5(1-e^{-x})-x=0$, q.e.d.

5) $f'(x)=5e^{-x}>0,$ donc f est croissant.

$f(4)=4{,}90\ldots>4,$

$f(5)=4{,}96\ldots<5,$

ainsi $f([4,5])\subset[4,5]$.

$q:=\sup_{x\in[4,5]}|f'(x)|=5e^{-4}=0{,}09157\ldots<1,$

donc d'après le théorème du point fixe il existe une solution unique de $f(x)=x$ dans l'intervalle $[4,5]$.

6) $f'(x)>1$ pour $x<\ln 5$. Alors la fonction $f(x)-x$ est strictement croissante pour $x<\ln 5$. Comme $f(0)=0$, on a $f(x)>x$ pour tout $x\in\,]0,\ln 5]$. Pour $x>\ln 5$ la fonction $f(x)-x$ est strictement décroissante, donc admet au plus une racine qui doit alors être celle qu'on a trouvé dans l'intervalle $[4,5]$ de la question précédente.

7) D'après 1) on sait que *F* possède un maximum et d'après les questions précédentes il est unique : $\tau=\xi^{-1}$, où ξ est l'unique solution de $f(x)=x$, $x>0$.

9) D'après le théorème du point fixe la suite $x_0:=5$, $x_n:=f(x_{n-1}),$ converge vers ξ, et on dispose de la majoration

$$|\xi-x_n|\leq\frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}|=\frac{5e^{-4}}{1-5e^{-4}}|x_n-x_{n-1}|\leq 0{,}101|x_n-x_{n-1}|.$$

Le calcul à $\pm 10^{-6}$ près donne

$x_0=5$

$x_1=4{,}966310\ldots$

$x_2=4{,}965155\ldots$

$x_3=4{,}964115\ldots$

$x_4=4{,}965114\ldots$

$x_5=4{,}965114\cdots$

Par suite $\xi=4{,}965114\pm10^{-6}.$ Donc $\tau=\xi^{-1}=0{,}2014052\pm10^{-7}$ est la maximum de *F*.