ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN
AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Les deux exercices sont indépendants. Aucun document n'est permis. Calculatrice élémentaire permise.

EXERCICE n° 1

Soit $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ la fonction $f(x) = |\sin x|$.

a) La fonction f, est-elle continue ? Est-elle dérivable ? Quelle est sa plus petite période ?

b) Montrer que f est indéfiniment dérivable en $\pi/2$. Soit $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - \frac{\pi}{2})^k$ la série de Taylor de f en $\pi/2$. Calculer ses coefficients $c_0, c_1, \ldots$. Déterminer le rayon de convergence de la série $T(x)$. Déterminer le plus grand intervalle I de IR contenant $\pi/2$, tel que $T(x)$ converge en chaque point x de I vers $f(x)$.

c) Soit $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ la série de Fourier de f. Calculer ses coefficients $a_0, a_1, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$.

d) Soient $T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} c_k (x - \frac{\pi}{2})^k$ et $F_4(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{4} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ les séries tronquées à l'ordre 4. Calculer $T_4(\pi/4)$ et $F_4(\pi/4)$. Quelle valeur est plus proche de $f(\pi/4)$?

EXERCICE n° 2

Rappelons le *théorème du point fixe* :

Soit $I \subset$ IR un intervalle fermé et $f: I \rightarrow$ IR une fonction dérivable avec $f(I) \subset I$. On suppose qu'il existe un réel $q<1$ tel que $|f'(x)| \leq q$ pour tout $x \in I$. Alors il existe une unique solution $\xi \in I$ de l'équation $f(x)=x$ et pour tout $x_0 \in I$ la suite $x_n = f(x_{n-1}),\ n \geq 1$, converge vers ξ. En plus on a la majoration

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.$$

Nous admettons ce théorème et allons l'appliquer pour calculer une approximation du maximum de la fonction

$$F : \mathrm{IR}_+^* \rightarrow \mathrm{IR}, t \mapsto t^{-5}\left(e^{1/t} - 1\right)^{-1}.$$

❶ Calculer $\lim_{t \to 0^+} F(t)$, $\lim_{t \to +\infty} F(t)$ et prouver que F possède un maximum.

❷ Esquisser le graphe de F sur l'intervalle]0,1]. (On prendra 10 cm comme unité dans la direction horizontale et 1 cm comme unité dans la direction verticale). En déduire un maximum à une précision de $\pm 5 \times 10^{-2}$ près.

❸ Prouver que, si t est maximum de F alors $5t(e^{\frac{1}{t}} - 1) - e^{\frac{1}{t}} = 0$.

❹ Soit $f(x) = 5(1 - e^{-x})$. Montrer que, avec la substitution $t = x^{-1}$, l'équation $5t(e^{\frac{1}{t}} - 1) - e^{\frac{1}{t}} = 0,\ t > 0$, est équivalente à $f(x) = x$, $x > 0$.

❺ Prouver qu'il existe une unique solution $\xi \in [4,5]$ de $f(x) = x$.

❻ Montrer que $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $\mathrm{IR}_+^* - [4,5]$.

❼ Déduire que F possède un unique maximum τ.

❽ Calculer ξ avec une précision de 10^{-6}. En déduire τ avec une précision de 10^{-7}.