Concours CESD 2001

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

1. Les trois vecteurs $(1,1,1),(2,4,8)$ et $(3,9,27)$ sont dans M_1, donc dans V_1. Ils sont linéairement indépendants, car

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} = 12 \neq 0.$$

   Alors $\dim V_1 \geq 3$, et comme la dimension de V_1 est bornée par celle de $\mathbb{R}^3$ elle vaut 3.
   Comme $(n+1, 2n+1, 3n+1) = n(1,2,3) + (1,1,1)$ on voit que V_2 est engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants $(1,2,3)$ et $(1,1,1)$. Par conséquent $\dim V_2 = 2$.

2. Soit a le remboursement annuel, c le montant du crédit et p le taux d'intérêt. Après le premier remboursement le montant restant du crédit est

$$(1+p)c - a.$$

   Après le deuxième remboursement le montant restant du crédit est

$$(1+p)((1+p)c - a) - a.$$

   En général, après le n-ième remboursement, $n = 0, \ldots, 5$ le montant restant est

$$(1+p)^n c - ((1+p)^{n-1} + (1+p)^{n-2} + \cdots + 1)a = (1+p)^n c - \frac{(1+p)^n - 1}{p} a.$$

   Pour $n = 5$ ce montant doit être nul, car le prêt dure 5 ans. Alors

$$a = \frac{p(1+p)^5}{(1+p)^5 - 1} c = \frac{0,04(1,04)^5}{(1,04)^5 - 1} \times 100\,000\text{FF} = 22\,462,71\text{FF}.$$

3. (a) Montrons d'abord que $a_{n+1}^2 \geq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet,

$$a_n^4 + c^2 - 2a_n^2 c = (a_n^2 - c)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a_n^4 + c^2 + 2a_n^2 c \geq 4a_n^2 c$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2}{4} + \frac{c^2}{4a_n^2} + \frac{c}{2} \geq c.$$

Maintenant montrons que $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{2a_n} = a_n.$$

Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée et décroissante. Comme $\mathbb{R}$ est complet elle doit alors converger vers une limite a dans $\mathbb{R}$.

(b) De $a = \lim a_n = \lim a_{n+1}$ et de la définition récurrente on déduit $a = \frac{a}{2} + \frac{c}{2a}$, et de là $a^2 = c$. Comme $a \geq 0$ on a $a = \sqrt{c}$.

4. (a) L'ensemble D est le triangle fermé entre les points $(0,0), (0,\pi)$ et $(\pi, 0)$.

(b) La fonction f s'anulle sur le bord ∂D du triangle D, et elle est strictement positive sur l'intérieur D°. Donc tous les points sur ∂D sont des minima (globaux) et il n'y en a pas d'autres.

(c) La fonction f est de la classe C^∞ car ses composantes le sont. Tous les extrema $(x,y) \in D^\circ$ vérifient alors

$$\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 0.$$

Ceci donne

$$\cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0,$$

$$\sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0.$$

Sur l'intérieur D° nous avons $\sin x \neq 0 \neq \sin y$, d'où

$$\cos x \sin(x+y) = -\sin x \cos(x+y), \ \cos y \sin(x+y) = -\sin y \cos(x+y).$$

De la première équation nous tirons que $\cos(x+y) \neq 0 \neq \cos x$, et de la deuxième que $\cos y \neq 0$. Donc par division

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sin x}{\sin y}.$$

D'où $\tan x = \tan y$, et enfin $x = y$. La première équation donne alors

$$\cos x \sin(2x) + \sin x \cos(2x) = 0,$$

donc $\sin(3x) = 0$. Alors $x = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent seul le point $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ peut annuler $\partial_x f$ et $\partial_y f$ — et il le fait (vérification facile).
Maintenant $(a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ est l'unique maximum de f. En effet la fonction f continue admet un maximum sur le compact D et $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ est l'unique candidat.
On a $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 3\sqrt{3}/8$.

(d) La série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 est

$$\begin{aligned} T_2 &= f(a,b) + (\partial_x f(a,b), \partial_y f(a,b)) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &\quad + (x-a, y-b) \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(a,b) & \partial_x \partial_y f(a,b) \\ \partial_y \partial_x f(a,b) & \partial_y^2 f(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &= 3\frac{\sqrt{3}}{8} + (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) & \partial_x \partial_y f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \\ \partial_y \partial_x f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) & \partial_y^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{3} \\ y - \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f &= 2\cos x \sin y \cos(x+y) - 2 \sin x \sin y \sin(x+y), \\ \partial_y^2 f &= 2 \sin x \cos y \cos(x+y) - 2 \sin x \sin y \sin(x+y), \\ \partial_x \partial_y f &= \cos x \cos y \sin(x+y) + \cos x \sin y \cos(x+y) \\ &\quad + \sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} T_2 &= 3\sqrt{3}/8 - (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{3} \\ y - \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= 3\sqrt{3}/8 - (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}/2(y - \frac{\pi}{3}) \\ \sqrt{3}/2(x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}(y - \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \\ &= 3\sqrt{3}/8 - \sqrt{3}((x - \frac{\pi}{3})^2 + (x - \frac{\pi}{3})(y - \frac{\pi}{3}) + (y - \frac{\pi}{3})^2). \end{aligned}$$

5. Avec la substitution $t = \tan x$ on a $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\cos^2 x$. Alors

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x \cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|\tan x|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} &= \ln \tan(\pi/3) - \ln \tan(\pi/6) \\ &= \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = \ln 3. \end{aligned}$$

6. (a)

$$\begin{aligned} Ona \sum_{k\geq 2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} &= \sum_{k\geq 2}^{n} (\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

ce qui converge vers $\frac{1}{4}$ quand $n \longrightarrow \infty$.

(b) D'aprés de l'Hôpital on a

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e.$$

7. On a $V = \pi r^2 h$ et $S = 2\pi r(r+h)$. Comme V est constant on peut remplacer $h = \frac{V}{\pi r^2}$ dans l'expression pour S :

$$\begin{aligned} S(r) &= 2\pi r(r + \frac{V}{\pi r^2}) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}, r > 0, \\ S'(r) &= 4\pi r - 2\frac{V}{r}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{r\to 0^+} S(r) = \lim_{r\to\infty} S(r) = \infty$, on sait que S possède un minimum. De $S'(r) = 0$ on tire $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, et de là $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.