

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE  
OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE  
DUREE : 2 HEURES

Calculatrice élémentaire permise.  
Les 7 exercices sont indépendants.

1. Considérons dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  les deux sous-ensembles

$$M_1 = \{(n, n^2, n^3) : n = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$M_2 = \{(n+1, 2n+1, 3n+1) : n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Soit  $V_k, k = 1, 2$ , le plus petit sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $M_k$ . Calculer la dimension de  $V_1$  et celle de  $V_2$ .



2. Une entreprise prend un prêt de 100 000 FF pour un taux d'intérêt de 4%. Le prêt est d'une durée de 5 ans et le montant du remboursement annuel est constant. Quel est ce montant ?

3. Soient  $c$  et  $a_0$  deux réels strictement positifs. On définit une suite par récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n}, n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Montrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
  - (b) Déterminer sa limite.
4. Soit  $D$  l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $x \geq 0, y \geq 0$  et  $x + y \leq \pi$ . On définit une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ .
- (a) Dessiner l'ensemble  $D$ .
  - (b) Déterminer tous les minima de  $f$ .
  - (c) Prouver que  $f$  n'a qu'un seul maximum  $(a, b)$ . Le déterminer et donner la valeur de  $f$  en ce point.
  - (d) Donner la série de Taylor de  $f$  au maximum  $(a, b)$  jusqu'à l'ordre 2.

5. La fonction  $f(x) = (\sin x \cos x)^{-1}$ , est-elle intégrable sur l'intervalle  $[\pi/6, \pi/3]$  ?  
Si oui, calculer l'intégrale

  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x \cos x}.$

6. Les limites suivantes existent-elles ? Si oui, donner les valeurs.

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2 - 1)}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

7. Comment faut-il choisir le rayon  $r$  et la hauteur  $h$  d'un cylindre de volume donné  $V$  pour que sa surface  $S$  soit minimale ? (La surface  $S$  du cylindre inclut aussi les deux disques en bas et en haut.)