Concours CESD 2002

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

Docs à portée de main

1. (a) Comme la matrice M est symétrique, elle est diagonalisable. On calcule les valeurs propres et vecteurs propres de $(1+p)M$, et on trouve :

$$(1+p)M = ADA^{-1}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$M^n = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1-p}{1+p})^n \end{pmatrix} A^{-1}$$

ce qui donne pour $n \to \infty$:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Les deux proportions sont égales. En effet, on peut raisonner sans calcul : après l'opération, la partie de bière dans la bouteille de vin prend un certain volume V qui avant était occupé par du vin. Or, lors de l'opération on ne perd pas de liquide et on a encore la même quantité dans chaque bouteille. Donc c'est précisément ce volume V de vin qui se trouve maintenant dans la bouteille de bière. (On peut aussi passer par un calcul, voir (c).)

(c) Soit a_n (resp. b_n) la proportion de bière dans la bouteille de vin (resp. de bière) après la n-ième opération. Evidemment, au départ, $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Détaillons la $(n+1)$-ième opération. En transvasant une proportion p, $0 < 1 < p$, de la bouteille de vin dans la bouteille de bière, on obtient encore la proportion a_n dans la bouteille de vin et la proportion $\frac{1}{1+p}(b_n + pa_n)$ dans la bouteille de bière. En retransvasant on obtient alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1-p)a_n + \frac{p}{1+p}(b_n + pa_n) = \frac{1}{1+p}(a_n + pb_n), \\ b_{n+1} &= \frac{1}{1+p}(b_n + pa_n). \end{aligned}$$

En écriture matricielle avec la matrice A de la partie (a), cela devient :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Donc avec le résultat de (a) on trouve $\lim a_n = \lim b_n = 1/2$.

2. Le chemin direct pour le bateaux est un grand cercle sur la terre, donc un cercle de circonférence 40000 km, tandis que le chemin direct pour le sous-marin est la droite entre les deux îles. On fera une esquisse du grand cercle, où O désigne le centre du cercle, M et R les deux îles, S le milieu du segment de droite entre M et S, et α l'angle MOR. On a

$$\begin{aligned} \alpha : (2\pi) &= 150 : 40000, \\ OM &= 40000\,\mathrm{km} : (2\pi), \\ OS : OM &= \cos(\alpha/2). \end{aligned}$$

La profondeur demandée est alors

$$\begin{aligned} OM - OS &= OM - OM\cos(\alpha/2) = OM(1-\cos(\alpha/2)) \\ &= 20000\,\mathrm{km}/\pi(1-\cos(3\pi/800)) = 441,78\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

C'est donc beaucoup plus que la plupart parmi nous auraient estimé...

3. (a) Si les deux fonctions sont solutions, on doit avoir $ax^2 - 2x = -b$ et $ax^3 - 3x^2 = -b$, donc $a(x^3 - x^2) - 3x^2 + 2x = 0$, d'où

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{3x-2}{x(x-1)}, \\ b &= -\tfrac{x^2}{x-1}. \end{aligned}$$

(b) L'équation différentielle $(*)$ est linéaire, de premier ordre, et sur chaque intervalle I_j le coéfficient de y' ne s'annulle pas. Comme x^2 et x^3 sont deux solutions linéairement indépendantes, nous savons alors par la théorie des équations différentielles linéaires que la solution générale sur I_j est donnée par $y_j = x^2 + \lambda_j(x^3 - x^2)$, où $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$.

(c) D'après ce qui précède la restriction à l'intervalle I_j d'une solution f doit être de la forme $y_j = x^2 + \lambda_j(x^3 - x^2)$. La condition $f(-1) = 0$ détermine $\lambda_1 = -1/2$, et la condition $f(2) = 0$ détermine $\lambda_3 = -2$. Maintenant il faut choisir λ_2 convenablement, pour que la "recollée" f soit de classe C^1. D'abord par continuité il faut que $y_1(0) = y_2(0)$ et $y_2(1) = y_3(1)$. On voit immédiatement que ces deux conditions sont vérifiées pour tous les choix de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Pour que f soit continument différentiable en 0 il faut et il suffit que $y_1'(0) = y_2'(0)$. Mais encore ici $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$ pour tous les choix de λ_1, λ_2. En revanche la dernière condition, $y_2'(1) = y_3'(1)$, donne $2 + \lambda_2 = 2 + \lambda_3$, donc $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. La fonction demandée existe alors et elle est unique.

(d) Pour avoir une fonction de classe C^2 on a les 2 conditions de "recollement" supplémentaires $y_1''(0) = y_2''(0)$ et $y_2''(1) = y_3''(1)$. Elles s'écrivent $2(1-\lambda_1) = 2(1-\lambda_2)$ et $2(1+2\lambda_2) = 2(1+2\lambda_3)$. Donc les conditions entrainent que pour toute solution de $(*)$ de classe C^2 on doit avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, et ceci n'est pas vérifié pour l'unique solution de classe C^1 trouvée ci-dessus. Donc il n'y a pas de telle solution dans la classe C^2.

4. Une condition nécessaire pour que l'espace des solutions a la dimension 1, est que la matrice du système homogène associé a le rang 2. Cette matrice est

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $\det(M) = pqr - pq - pr - qr$. Pour trouver le rang de M avec $0 \leq p, q, r \leq 2$, il y a plusieurs cas à considérer :
– Au moins un parmi les p, q, r est nul.
Si $p = q = r = 0$, on voit immédiatement que rg(M)=1.
Si précisément 2 nombres parmi p, q, r sont nuls, alors $\det M = 0$ et il y a une sous-matrice 2×2 de rang 2. Donc rg(M)=2.
Si précisément 1 nombre parmi p, q, r est nul, alors $\det M \neq 0$. On a donc rg(M)=3.
– $p, q, r \geq 1$ et au moins un parmi les p, q, r vaut 1.
Supposons par exemple $p = 1$. Alors $\det M = -q - r < 0$, donc rg(M)=3.
– $p = q = r = 2$. Alors $\det(M) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \neq 0$, donc rg$(M)$=3.
Ainsi l'espace vectoriel du système homogène a la dimension 1 précisément quand (p, q, r) est $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ ou $(0, 0, 2)$. L'espace des solutions du système inhomogène est alors de dimension 1 précisément si (p, q, r) est l'un des ces 6 triplets et si le système inhomogène possède une solution, i.e., si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-r & 0 \end{pmatrix}.$$

Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main

a le même rang que M, donc est de rang 2. C'est le cas seulement pour $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ et $(p, q, r) = (2, 0, 0)$.

5. La fonction continue sin est Riemann-intégrable. La définition de l'intégrabilité nous donne :

$$\frac{2}{\pi} = \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\pi/n)}{n}.$$

6. Les théorèmes d'addition donnent :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-\cos x} &= \sqrt{1-\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)} \\
&= \sqrt{2\sin^2(x/2)} \\
&= \sqrt{2}\,|\sin(x/2)|.
\end{aligned}
$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Donc on a comme primitive $-2\sqrt{2}\cos(x/2)$ sur $[0,2\pi]$ et $2\sqrt{2}\cos(x/2)$ sur $[-2\pi,0]$. On obtient finalement :

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{3\pi/2} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3\pi/2} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{2}(\cos(0)-\cos(-\pi/2)-\cos(3\pi/4)+\cos(0)) \\
&= 2\sqrt{2}(2+1/\sqrt{2}) \\
&= 2(1+2\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$