

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
DUREE : 2 HEURES

Calculatrice élémentaire permise.
Les six exercices sont indépendants.

1. (a) Considérons pour $0 < p < 1$ la matrice

 $M = \frac{1}{1+p} \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix}.$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$.

- (b) Une bouteille de vin contient un litre de vin, et une bouteille de bière un litre de bière. On verse une partie de la première dans la seconde. Puis une partie de la seconde dans la première, de sorte qu'à l'issue de cette opération chacune des deux bouteilles contient un litre de mélange. La proportion de bière dans la bouteille de vin est-elle plus petite, égale ou plus grande que la proportion de vin dans la bouteille de bière ?
- (c) On itère n fois l'opération décrite ci-dessus, en transvasant toujours la même quantité. Calculer la proportion de bière dans chaque bouteille lorsque n tend vers ∞ .
2. Pour un bateaux le chemin direct entre l'Ile de la Réunion et l'Ile Maurice est de 150 km. Mais à cause de la courbure de la terre le chemin direct pour un sous-marin est plus court. Quelle est la profondeur maximale par laquelle le sous-marin doit passer en prenant ce chemin ? (On supposera dans cet exercice que la terre est un boule parfaite d'une circonférence de 40000 km.)

3. (a) Comment faut-il choisir les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ pour que les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ soient des solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$?
- (b) On considère l'équation différentielle :

$$(*) \quad x(1-x)y' + (3x-2)y = x^3.$$

Déterminer la solution générale de $(*)$ sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, \infty[$.

- (c) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui est solution de $(*)$ et qui vérifie $f(-1) = f(2) = 0$? Si oui, est-elle unique ? (On rappelle que C^k signifie k fois continument différentiable.)
- (d) Même question que la précédente, mais avec une fonction de classe C^2 !
4. On considère le système linéaire suivant en les inconnus $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et les paramètres (p, q, r) :



$$\begin{aligned} x + y + z - px &= 1, \\ x + y + z - qy &= 0, \\ x + y + z - rz &= 0. \end{aligned}$$

Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres entiers ≥ 0 et ≤ 2 tels que l'espace de solutions de ce système est de dimension 1.

5. Est-ce que l'expression

$$\frac{\sin(\pi/n) + \sin(2\pi/n) + \cdots + \sin((n-1)\pi/n)}{n}$$

a une limite lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini ? Si oui, la calculer !

6. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\pi}^{3\pi/2} \sqrt{1 - \cos x} \, dx.$$