ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
DUREE : 2 heures

- **Exercice 1 :**

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\tilde{x})\frac{(x-x_0)^2}{2}$ avec $\tilde{x} \in \mathcal{B}(x_0; \|x - x_0\|_E)$.
2. Une partie de l'énoncé a été omise ici. Il fallait lire
$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \Longleftrightarrow f \text{ convexe}$$
Et ainsi avec le point précédent, on obtient $f'' > 0 \Longrightarrow f$ convexe.
3. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées du moment qu'elles mettent en application les points précédents. On peut par exemple étendre le résultat du point 2 au cas où $f" \geq 0$. Comme $f"(x) = 12x^2 \geq 0$, on applique ensuite la définition d'une fonction convexe avec $\lambda = \frac{1}{2}$.

- **Exercice 2 :**

1. On note
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$
Afin de simplifier les calculs, on peut effectuer un premier changement de variable défini par $\tilde{x} = \frac{x-m}{\sigma}$. On obtient
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} d\tilde{x}$$
Et, en passant par
$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{2\pi} dxdy$$
Il suffit maintenant d'effectuer un changement de variables en coordonnées polaires classique pour obtenir $I = 1$.
2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$.
Soit
$$\Phi_n(t) = \phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n$$

$$= \left(\exp\left(-\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\sigma^2}{2}\right)\right)^n$$

$$= \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

Ainsi la limite de $\Phi_n(t)$ est égale à $\phi(t)$ pour tout t.

- **Exercice 3 :**

1. $xf(x)$ est divergente de première espèce sur $\mathbb{R}^+$ car équivalente à $\frac{1}{x}$.
2. $xf(x)$ est divergente de première espèce sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$, ces deux intégrales valant $+\infty$ dans les deux cas. On obtient donc une intégrale sur $\mathbb{R}$ divergente de seconde espèce (i.e : la loi de Cauchy ne possède pas d'espérance).

- **Exercice 4 :**

1. Soient $f, g \in C([0,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\|f\|_1$ et $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. $f = 0$ entraîne $\|f\|_1 = 0$, de plus comme f est continue sur $[0;1]$ et que $|f|$ est positive $\|f\|_1 = 0$ entraîne $f = 0$. Enfin $\|f\|_1$ est toujours positive.

   (a) On considère
   $$\begin{cases} f_n(x) = 0 \quad si\ x \in [0, 1/2] \\ f_n(x) = nx - n/2 \quad si\ x \in]1/2, 1/2 + 1/n[\\ fn(x) = 1 \quad si\ x \in [1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

   (b) Soit n et p deux entiers non nuls quelconque, $|f_n - f_p| \leq |f_n| + |f_p|$ est toujours inférieur à 2. De plus f_n coincide avec f_p hors de $]1/2, 1/2 + 1/p[$. Soit n et p deux entiers avec $n > p$, on a alors
   $$\|f_n - f_p\|_1 = \int_{1/2}^{1/2+1/p} |f_n(x) - f_p(x)|dx \leq \frac{2}{p}$$
   Ce qui prouve que f_n est de Cauchy.

   (c) On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction f continue, limite de f_n au sens de la norme 1. On a
   $$\int_0^{1/2} |f(x)|dx = \int_0^{1/2} |f_n(x) - f(x)|dx \leq \|f_n - f\|_1$$
   et pour $n \geq p$,
   $$\int_{1/2+1/p}^{1} |1 - f(x)|dx \leq \int_{1/2+1/p}^{1} |f_n(x) - f(x)|dx \leq \|f_n - f\|_1$$

   (d) En passant à la limite dans les deux inégalités, on obtient d'une part
   $$\int_0^{1/2} |f(x)|dx = 0$$
   Et ainsi f est nulle sur $[0, 1/2]$. Et d'autre part, pour n et p tendant vers l'infini, on obtient également $\int_{1/2}^{1} |1 - f(x)|dx = 0$. Et ainsi, $f(1/2) = 1$. Ces deux points sont en contradiction ($f(1/2) = 0$ et $f(1/2) = 1$).
   On a donc trouvé une suite de Cauchy qui ne converge pas pour cette norme. L'espace associé avec cette norme n'est donc pas complet.

- **Exercice 5 :**

  1. On appelle $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 1+i et 1-i respectivement.
  2. Les espaces propres associés sont engendrés par $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ et $\bar{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$ sur la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
  3. $T = U + iV$ et $\bar{T} = U - iV$.
  4. On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. la solution générale du système est

  $$X_n = \alpha(1+i)^n T + \bar{\alpha}(1-i)^n \bar{T}$$

  En développant les valeurs propres sous la forme trigonométrique on obtient

  $$X_n = \alpha\sqrt{2}^n(cos(\frac{n\pi}{4}) + isin(\frac{n\pi}{4}))T + \bar{\alpha}\sqrt{2}^n(cos(\frac{n\pi}{4}) - isin(\frac{n\pi}{4}))\bar{T}$$

  et en notant $\alpha = a + ib$ on a

  $$X_n = 2\sqrt{2}^n\left[a\left(cos(\frac{n\pi}{4})U - sin(\frac{n\pi}{4})V\right) - b\left(sin(\frac{n\pi}{4})U + cos(\frac{n\pi}{4})V\right)\right]$$

- **Exercice 6 :**
A tout instant on a $r(t)/h(t) = tan(30) = 1/\sqrt{3}$ où $r(t)$ est le rayon du disque formé par la surface du liquide à l'instant t.
L'aire $A(t)$ est donc de $\pi r^2(t) = \pi h^2(t)/3$. On a , par hypothèse $a = 5.10^{-5}m^2$. Ainsi, en utilisant la dynamique donnée, on obtient

$$h'(t) = -\sqrt{2g}\frac{a}{A(t)\pi}\sqrt{h(t)} = -3a\sqrt{2g}h^{\frac{3}{2}}(t)$$

On obtient l'équation différentielle du premier ordre

$$h'(t) = -Kh^{-\frac{3}{2}}(t)$$

avec $K = \sqrt{19,6}.15.10^{-5}/\pi$. Ainsi

$$h(t) = (-2,5Kt + C)^{2/5}$$

Puisque $h(0) = 0,1$, on a $C = (0,1)^{5/2} = 0,00316$. L'entonnoir est vide si $a = A$ et $h(t) = 6,9.10^{-3}$. On trouve $T = 6$ secondes.