**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE**
**ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**ABIDJAN**

**AVRIL 2003**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE**

**DUREE : 2 HEURES**

**Calculatrice permise.**
**Tous les exercices sont indépendants et de difficultés diverses.**



- **Exercice 1 :**

On dit que $E$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, est convexe si

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in [0;1], \quad \lambda\, x + (1-\lambda)y \in E$$

On dit que $f$, une application de $E$ dans $\mathbb{R}$, est convexe si $E$ est convexe et si

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in [0;1], \quad f(\lambda\, x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Soit $E$ un ensemble convexe de $\mathbb{R}$. On admet que pour toute fonction $f$ continuement dérivable de $E$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x, x_0 \in E, \quad f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

1. Soit $x$ et $x_0$ deux réels de $E$. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre deux de $f(x)$ en $x_0$ avec reste exact.
2. Montrer que, si $E$ est convexe et $f$ deux fois continuement dérivable sur tout $E$, on a $f'' > 0$ entraîne $f$ convexe.
3. Application : montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^4 \leq 2^3(x^4 + y^4)$$

- **Exercice 2 :**

1. Soit $m$ un réel, et $\sigma$ un réel strictement positif.
Sans utiliser la densité d'une loi gaussienne, calculer à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

(*on pensera par exemple à calculer le carré de cette intégrale*).

2. Soit $\phi$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$.
Soit $\Phi_n(t) = \phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n$. Calculer pour tout $t$ réel, la limite de $\Phi_n(t)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

- **Exercice 3 :**

Soit $\alpha > 0$ et pour tout $x$ réel,

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}$$

1. $xf(x)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ? Dans l'affirmative, calculer cette intégrale, dans le cas contraire, préciser le type de divergence.
2. $xf(x)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$ ? Dans l'affirmative, calculer cette intégrale, dans le cas contraire, préciser le type de divergence.

- **Exercice 4 :**

Pour toute fonction $f \in C([0,1])$ où $C([0,1])$ est l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Montrer que $\| \ \|_1$ est une norme sur l'espace vectoriel $C([0,1])$.
2. On cherche à montrer que $C([0,1])$ muni de $\| \ \|_1$ n'est pas complet.
   (a) Exprimer la suite $f_n(x)$ définie par une suite de fonctions continues, affines par morceaux, nulles sur $[0,1/2]$ et valant 1 sur $[1/2+1/n,1]$.
   (b) Montrer que $f_n$ est de Cauchy pour la norme $\| \ \|_1$. On montrera au préalable que pour tout $n$ et $p$ entiers non nuls avec $n > p$, on a $|f_n - f_p| \leq 2$.
   (c) On suppose qu'il existe une fonction continue $f$ limite, au sens de la norme $\| \ \|_1$, de $f_n$. Comparer
   $$\int_0^{1/2} |f(x)|dx \quad \text{et} \quad \int_{1/2+1/p}^{1} |1-f(x)|dx$$
   avec $\|f_n - f\|_1$ pour $n > p$.
   (d) Conclure.



- **Exercice 5 :**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer les vecteurs propres engendrant les sous-espaces propres associés.
3. Exprimer ces vecteurs en fonction de $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. Exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ sous la forme d'une combinaison linéaire réelle de $U$ et $V$.

- **Exercice 6 :**

Un entonnoir conique d'angle au sommet 60 degrés et de hauteur 10 cm présente une ouverture de 0,5 $cm^2$ à sa base. On place l'entonnoir verticalement, et on le remplit d'eau. On note $h(t)$ la hauteur comprise entre l'ouverture de l'entonnoir et la surface du liquide au temps $t$.
La dynamique d'écoulement de l'eau s'exprime en fonction de $h(t)$ par la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad h'(t) = -C\sqrt{h(t)}$$

avec $C = \frac{a}{A(t)}\sqrt{2g}$, où $g = 9,8$, $a$ est l'aire de l'ouverture de l'entonnoir et $A(t)$ est l'aire de la surface du liquide à l'instant $t$.
Calculer le temps $T$ que l'entonnoir met à se vider complètement.