AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE OPTION MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I :

On choisit $\| f \|_a = sup_{x\in[0;1]}\{|f(x)|\}$ et $\| f \|_b = \int_{[0;1]} |f(x)|dx$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_a = 1$ et $\|f_n\|_b = \frac{1}{2n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice II :

1. L'intégrale de $\frac{r3^r x^k}{(3+x)^{r+1}}$ est de type Riemann et converge si et seulement si $r+1-k>1$ ou encore $k<r$. La quantité $M_{k;r}$ est définie pour tout $k \in \{0, \cdots, r-1\}$.

2. On effectue une intégration par parties avec $u(x) = x^k$ et $v'(x) = \frac{r3^r}{(3+x)^{r+1}}$. On obtient $u'(x) = kx^{k-1}$ et $v(x) = \frac{-3^r}{(3+x)^r}$ et pour tout $k \in \{0, \cdots, r-1\}$,

$$\begin{aligned} M_{k;r} &= \left[-\frac{3^r x^k}{(3+x)^r}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{3^r k x^{k-1}}{(3+x)^r}dx \\ &= \frac{3k}{r-1}\int_0^{+\infty} \frac{(r-1)3^{r-1}x^{k-1}}{(3+x)^{(r-1)+1}}dx \\ &= \frac{3k}{r-1}M_{k-1;r-1} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} M_{0;r-k} &= \int_0^{+\infty} \frac{(r-k)3^{r-k}}{(3+x)^{r-k+1}}dx \\ &= \left[-\frac{3^{r-k}}{(3+x)^{r-k}}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. Comme $k<r$, on montre par récurrence sur k que

$$M_{k;r} = \frac{3^k k!(r-k-1)!}{(r-1)!}M_{0;r-k}$$

ou encore, pour tout $k \in \{0; \cdots ; r-1\}$, $\quad M_{k;r} = \frac{3^k}{C_{r-1}^k}$

Problème :

A) Préliminaires :

1. Par définition de la norme matricielle on a pour tout x non identiquement nul les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|B_1(B_2x)\|_a &\leq \|B_1\|_A\|B_2x\|_a \\ \|B_2x\|_a &\leq \|x\|_a\|B_2\|_A \end{aligned}$$

dont on tire $\|B_1B_2x\|_a \leq \|B_1\|_A\|B_2\|_A\|x\|_a$ pour tout x non nul et ainsi

$$\frac{\|B_1B_2x\|_a}{\|x\|_a} \leq \|B_1\|_A\|B_2\|_A$$

et qui est en particulier vraie pour le sup sur x.

2. (a) $\lim_{k\to+\infty} B^k v = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|B^k v\|_a = 0$ par définition d'une norme. Or comme B^k tend vers la matrice identiquement nulle avec k, $\|B^k\|_A$ tend également vers 0 avec k, et pour tout v non nul

$$\|B^k\|_A\|v\|_a \geq \|B^k v\|_a$$

ce qui nous permet de conclure avec le fait que $B^k v = 0$ lorsque v est nul.

(b) Soit v_{i_0} le vecteur propre associé à la valeur propre λ_{i_0} (donc v_{i_0} est différent du vecteur nul) où λ_{i_0} est telle que $\rho(B) = |\lambda_{i_0}|$. On a $B^k v_{i_0} = \lambda_{i_0}^k v_{i_0}$. Ainsi $B^k v_{i_0}$ converge vers 0 si et seulement si $|\lambda_{i_0}| < 1$.

(c) Montrer que B^k tend vers 0 avec k est équivalent à montrer que $\|B^k\|_A$ tend vers 0 avec k. Or d'après le résultat établi en **A)1.** on a $\|B^k\|_A \leq \|B\|_A^k$. Comme il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ telle que $\|B\|_A < 1$ on obtient le résultat voulu.

B) Méthode

1. On pose $e_0 = u_0 - u$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= u_{k+1} - u \\ e_{k+1} &= Bu_k + c - (Bu + c) \\ e_{k+1} &= Be_k \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient facilement pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_k = B^k e_0$.

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} u_k &= u \\ \lim_{k\to+\infty} e_k &= 0 \\ \lim_{k\to+\infty} B^k e_0 &= 0 \end{aligned}$$

Et d'après le **A) (a)** on a $\lim_{k\to+\infty} B^k = 0$ équivalent à $\rho(B) < 1$ et "il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ telle que $\|B\|_A < 1$"

2. (a)

$$\begin{aligned} Au &= b \\ \Leftrightarrow\ (M-N)u &= b \\ \Leftrightarrow\ Mu &= Nu + b \\ \Leftrightarrow\ u &= M^{-1}Nu + M^{-1}b \quad \text{car } M \text{ est inversible} \\ \Leftrightarrow\ u &= Bu + c \quad \text{avec } B = M^{-1}N \text{ et } c = M^{-1}b \end{aligned}$$

La matrice A est inversible, c'est à dire que $(M-N)$ est inversible. Et on a

$$\begin{aligned}
\left((M-N)^{-1}M\right)(I-M^{-1}N) &= \left(M(I-M^{-1}N)\right)^{-1}M(I-M^{-1}N) \\
&= \left((I-M^{-1}N)\right)^{-1}M^{-1}M(I-M^{-1}N) \\
&= \left((I-M^{-1}N)\right)^{-1}M^{-1}M(I-M^{-1}N) \\
&= \left((I-M^{-1}N)\right)^{-1}(I-M^{-1}N) \\
&= I
\end{aligned}$$

De même avec la multiplication à droite, on obtient $I-M^{-1}N$ est inversible.

(b) On définit la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ par u_0 réel quelconque et pour tout k non nul,

$$u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$$

C) Application :

On peut écrire $A = M - N$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est inversible (facilement) et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

A est inversible car son déterminant est non nul. La matrice $B = M^{-1}N$ est égale à $\frac{1}{2}N$ qui est inversible d'après **B)2.(a)**. Et $\|B\|_A < 1$ pour $\|\ .\ \|_a$= norme sup sur $\mathbb{R}^n$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}Nu_k + \frac{1}{2}b$$

converge vers u quelque soit u_0.