ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice I :

Soient $E = \{f : [0;1] \to \mathbb{R},\ \textit{continue}\}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions de E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = \begin{cases} -nx+1 & x \in [0;\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Proposer deux normes $\| \,.\, \|_a$ et $\| \,.\, \|_b$ sur E telles que $(\|f_n\|_a)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(\|f_n\|_b)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

Exercice II :

Soit r un entier supérieur strictement à 2.

1. Déterminer $k \in \mathbb{N}$ tel que
$$\int_0^{+\infty} \frac{r3^r x^k}{(3+x)^{r+1}}\, dx < +\infty$$
On note cette intégrale $M_{k;r}$
2. Exprimer $M_{k;r}$ en fonction de $M_{k-1;r-1}$.
3. Calculer $M_{0;r-k}$.
4. Exprimer $M_{k;r}$ en fonction du coefficient binômial $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\ (n\text{-}p)!}$.

Problème :

Soit $\| .\|_a$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\| \,.\, \|_A$ la norme matricielle subordonnée à $\| \,.\, \|_a$ définie par

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|B\|_A = \sup_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} \frac{\|Bx\|_a}{\|x\|_a}$$

Et on note

$$\rho(B) = \max_{1\leq i\leq n} \{|\lambda_i(B)|\}$$

où $\lambda_i(B)$ est la $i^{\text{ème}}$ racine complexe du polynôme caractéristique de B.

A) Préliminaires

1. Vérifier que pour toutes matrices B_1 et B_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\|B_1B_2\|_A \leq \|B_1\|_A\|B_2\|_A$$

2. Montrer que

   (a)
   $$\lim_{k\to+\infty} B^k = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} B^k v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

   (b)
   $$\lim_{k\to+\infty} B^k v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \rho(B) < 1$$

   (c) On admet que :
   $\rho(B) < 1 \Longrightarrow$ Il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\|B\|_A < 1$.

   Montrer que s'il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\|B\|_A < 1$, alors $\lim_{k\to+\infty} B^k = 0$

B) Méthode

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I - B)$ soit inversible lorsque I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit c un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit u comme l'unique solution de

$$u = Bu + c$$

Soit u_0 un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = Bu_k + c$$

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

   (a) $\lim_{k\to+\infty} u_k = u, \quad u_0 \in \mathbb{R}^n$

   (b) $\rho(B) < 1$

   (c) Il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\|B\|_A < 1$

2. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec u l'unique solution du système
   $$Au = b$$
   On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = M - N$.

   (a) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $(I - B)$ inversible et $c \in \mathbb{R}^n$ tels que
   $$Au = b \Longleftrightarrow u = Bu + c$$
   Exprimer B et c en fonction de M, N et b.

   (b) Proposer une méthode itérative permettant de calculer une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers u quel que soit le vecteur initial u_0 à partir de M, N et b.

C) Application :

Expliciter une méthode itérative permettant d'approcher l'unique solution $u \in \mathbb{R}^n$ de l'équation $Au = b$ lorsque A et b sont tels que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$