ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I :

1. Pour tout $t \geq 0$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > \lambda t\right)$$

La fonction exponentielle est strictement croissante donc,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\right) = \mathbb{P}\left(e^{\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} > e^{\lambda t}\right)$$

La fonction exponentielle est toujours positive, et par l'inégalité de Markov, on obtient le résultat voulu.

2. La loi de $X_1, \cdots, X_n$ étant symétrique on a

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right).$$

3. On utilise les espérances conditionnelles avec la propriété suivante : soient Z et Y deux variables aléatoires, on a $\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(YZ|Y))$. De plus les σ_i sont indépendants entre eux et indépendants des X_i, aussi

$$\begin{aligned}\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) &= \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \left(e^{\lambda \frac{\sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) \;\middle|\; X_1, \cdots, X_n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) \;\middle|\; X_1, \cdots, X_n\right).\end{aligned}$$

4. On exprime la loi des σ_i qui est indépendante de l'échantillon $X_1, \cdots, X_n$, puis l'inégalité rappelée dans l'énoncé de cette question.

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2}\left(e^{\lambda \frac{X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} + e^{\lambda \frac{-X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda^2 \frac{X_i^2}{2\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}\right)\\
&\leq \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}\right)\\
&\leq \quad \mathbb{E}(e^{\frac{\lambda^2}{2}})\\
&\leq \quad e^{\frac{\lambda^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

5. Pour Z une variable aléatoire de loi symétrique, on a toujours pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(|Z| > t) = \mathbb{P}((Z > t) \cup (-Z > t)) = \mathbb{P}(Z > t) + \mathbb{P}(-Z > t) = 2\mathbb{P}(Z > t)$. Ainsi pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}\right| > t\right) &= 2\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} > t\right)\\
&\leq e^{-\lambda t + \frac{\lambda^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

La fonction qui à $\lambda > 0$ associe $-\lambda t + \frac{\lambda^2}{2}$ admet un minimum en $\lambda = \frac{t}{2}$. D'où le résultat voulu.

Problème :

Partie I.

1. (a) La fonction $t \mapsto \tilde{x}(t) + sh(t)$ est une combinaison linéaire de deux fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ elle est donc également une fonction de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   (b) On a $x(t_i) + sh(t_i) = x_0 + s0 = x_0$ et $x(t_f) + sh(t_f) = x_1 + s0 = x_1$.

   (c) On a par définition de $\tilde{x}$,
   $$\forall s > 0, \quad \Phi(\tilde{x}) \geq \Phi(\tilde{x} + sh)$$

   (d) Pour tout s_0,
   $$g'(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x} + s_0 h)}{s - s_0}.$$
   Pour $s_0 = 0$ on obtient
   $$g'(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x})}{s - 0}.$$
   Et d'après la question précédente et par continuité de $g'(s)$ on a
   $$\lim_{s \to 0, s > 0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x})}{s - 0} = \lim_{s \to 0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x})}{s - 0} \leq 0.$$

2. (a) Par définition de ϕ,
   $$g(s) = \int_{t_i}^{t_f} U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))dt.$$

(b) La fonction qui à s associe $U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))$ est continument dérivable par rapport à s car U est continument dérivable par rapport à chacune de ses variables. Ainsi sur le compact $[t_i, t_f]$ cette dérivée est bornée en tant que combinaison de fonctions continues (dérivée de U par rapport à sa deuxième et troisième variable, h, et dérivée de h) sur un compact. On peut donc intervertir le signe dérivation par rapport à s et le signe intégrale.

(c) D'une part, la dérivée de $U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))$ par rapport à s vaut $\partial_{z_2} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h(t) + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h'(t)$.
D'autre part $g'(0) \leq 0$ et $g'(0)$ vaut

$$\begin{aligned}
0 \geq g'(0) &= \frac{d}{ds}\left(\int_{t_i}^{t_f} U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))dt\right)_{s=0} \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{ds}\left(U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))\right)_{s=0} dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \partial_{z_2} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h(t) + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h'(t)dt
\end{aligned}$$

(d) On pose une intégration par partie avec $h(t)$ qui a pour dérivée $h'(t)$ et $\partial_{z_2} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))$ qui a pour primitive $\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A$ pour A constante quelconque. De plus $h(t_i) = h(t_f) = 0$. Puis on place $h'(t)$ en facteur.

3. Soit $h(t)$ telle que

$$h'(t) = -\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)).$$

Il existe donc B constante telle que

$$h(s) = \int_{t_i}^{s}\left(-\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right) dt + B.$$

. On choisit A et B tels que $h(t_i) = h(t_f) = 0$. C'est à dire $B = 0$ garantit que $h(t_i) = 0$ et A etlq ue

$$\int_{t_i}^{t_f}\left(-\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right) dt = 0$$

(a) Comme U est continument dérivable ainsi que x, h est deux fois continument dérivable. De plus une primitive de h peut s'écrire comme

$$h(w) = \int_{t_i}^{w}\left(-\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right) dw + a.$$

où a est une constante. Par définition de h, on a $h(t_i) = 0$

(b) Avec cette expression pour h' et avec l'expression obtenue précédement, on a maintenant

$$\int_{t_i}^{t_f} (h'(t))^2 dt \leq 0.$$

De plus h' est continue donc, $h'(t) = 0$ pour tout $t \in [t_i, t_f]$.

(c) On exprime $h'(t) = 0$ puis on dérive cette expression par rapport à t.

Partie II.

1. La fonction $y(t)$ étant le nombre de vis fabriquée en tout temps t, $w(s)$ est le nombre de vis fabriquées entre 0 et s.
2. $y(t) = w'(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.
3. La vitesse de production est la dérivée du nombre de vis produite. C'est à dire $y(t) = w'(t)$.
4. $w(0) = 0$ et $w(T) = B$ si l'on veut honorer la commande.
5. $S(t) = c_1 w(t)$.
6. $F(t)$ est proportionnelle à la vitesse de production qui est $y(t)$. Le coût de fabrication instantanée vaut donc $y(t)$ nombre de vis produites en tout temps t multiplié par le nombre de vis produites en tout temps t. On a donc $F(t) = c_2 y^2(t)$, avec c_2 constante strictement positive (sinon, le coût de fabrication serait nul).
7. Le coût total instantané $C(t) = S(t) + F(t)$ où encore
$$C(t) = c_1 w(t) + c_2 (w'(t))^2$$

8. Le coût total $\mathcal{C}$ est la somme des coût instantanés. Il vaut
$$\mathcal{C} = \int_0^T c_1 w(t) + c_2 (w'(t))^2 dt$$
9.
   - $\min_{w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})} \int_0^T c_2 (w'(t))^2 + c_1 w(t) dt$ représente le plan de production $w(t)$ à respecter afin de minimiser le coût. On impose cependant qu'il doit y avoir une évolution "douce" dans l'évolution de ce plan de production avec l'hypothèse $w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
   - $w(0) = 0$ exprime la condition : il n'y a pas de stock de vis à la date $t = 0$.
   - $w(T) = B$ exprime le fait qu'il faut avoir B vis fabriquées à la date $t = T$.
   - $w(t) > 0$ induit un démarrage de la production dès la date de passage de la commande $t = 0$.
   - $w'(t) \geq 0$ impose qu'il ne peut pas avoir destruction des vis fabriquées.
10. On applique le résultat obtenu dans la partie I équation (3) puisque le minimum de l'intégrale de U est identique au maximum de l'intégrale de $-U$, avec $x = w$, $t_i = 0, t_f = T, x_0 = 0$ et $x_1 = B$. On a donc à résoudre pour tout temps $t \in [0, T]$,
$$c_1 = c_2 w''(t)$$
sous les conditions initiales et finales $w(0) = 0$ et $w(T) = B$. On obtient pour $t \in [0, T]$,
$$w(t) = t(\frac{c_1}{4c_2}(t - T) + \frac{B}{T}).$$
11. $w(t) > 0$ équivaut à $\frac{c_1}{4c_2}(t - T) + \frac{B}{T} > 0$ où encore $t > T - \frac{4c_2}{c_1}\frac{B}{T}$ ceci pour tout temps $t \in]0, T]$. Ce qui donne encore
$$\frac{4c_2}{c_1} B > T^2$$
La seconde condition $w'(t) \geq 0$ pour $t \in]0, T]$ donne $B \geq \frac{c_1}{4c_2} T^2$. Qui est la même condition. B doit donc être suffisament grand devant la période de temps T disponible pour des constantes de coût de stockage et de fabrication c_1 et c_2 données.
12. Si H_1 n'est pas respectée, il suffit de rendre plus petit le second terme c'est à dire qu'il convient de démarrer la production plus tard et de manière à ce que $\tilde{T}$ respecte $H1$.