ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un n-échantillon de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ l'espace des réels muni de la tribu borélienne et sa probabilité image. On a $var(X_i) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_i) = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. De plus, la probabilité P_X est symétrique, c'est-à-dire qu'elle est telle que pour tout événement $B \in \mathcal{B}$,

$$P_X(B) = P_{-X}(B)$$

où P_{-X} est la loi de la variable aléatoire $-X_i$.

1. Montrer que

$$\forall t \geq 0, \lambda > 0, \quad \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\right) \leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right)$$

2. Soit un n-échantillon $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ indépendant de l'échantillon $X_1, \cdots, X_n$, tel que $\mathbb{P}(\sigma_i = 1) = \mathbb{P}(\sigma_i = 0) = \frac{1}{2}$. Justifiez l'égalité suivante

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right)$$

3. Montrer que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} \;\middle|\; X_1, \cdots, X_n\right)\right)$$

4. On rappelle que pour tout y réel, on a $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \leq e^{\frac{y^2}{2}}$. A l'aide de cette inégalité montrer que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

5. Conclure en montrant que

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}\right| > t\right) \leq 2e^{\frac{t^2}{2}}$$

Problème

Partie I.
Soit U une fonction deux fois continûment dérivable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ ($U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$). Soit x une fonction deux fois continûment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Soient t_i, t_f, x_0, x_1 quatre réels donnés tels que

$$\begin{cases} x(t_i) = x_0 \\ x(t_f) = x_1 \end{cases}$$

On appellera par la suite cette condition sur x : *CIF*.
On cherche dans cette partie à exprimer une condition sur $\tilde{x}(t)$ afin que

$$\max_{x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ CIF} \{\Phi(x)\} = \Phi(\tilde{x}) \tag{1}$$

lorsque

$$\Phi(x) = \int_{t_i}^{t_f} U(t, x(t), x'(t))dt$$

On notera pour tout ce qui suit $\partial_{zi}U$ la dérivée partielle de U par rapport à sa i $^{\text{ème}}$ variable pour $i = 1, 2, 3$.
On considère $\tilde{x}$ une solution de (1).

1. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $h(t_i) = h(t_f) = 0$. Soit $s > 0$.

   (a) A-t-on $t \mapsto \tilde{x}(t) + sh(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
   (b) Cette fonction remplit-elle les conditions *CIF* ?
   (c) Comparer $\Phi(\tilde{x})$ et $\Phi(\tilde{x} + sh)$ pour tout $s > 0$.
   (d) Soit $g(s) = \Phi(\tilde{x} + sh)$ définie pour tout $s \in \mathbb{R}$. A l'aide de la définition d'une dérivée, montrer que $g'(0) \leq 0$.

2. (a) Exprimer $g(s)$ en fonction de U, t, x, x', s et h.
   (b) Montrer qu'on peut intervertir le signe dérivation par rapport à s et le signe intégrale dans l'expression suivante

$$\frac{d}{ds}\left[\int_{t_i}^{t_f} U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))dt\right]$$

   (c) Montrer que l'on a

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[\partial_{z_2}U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h(t) + \partial_{z_3}U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h'(t)\right] dt \leq 0$$

   (d) A l'aide d'une intégration par partie que l'on posera soigneusement, montrer qu'il existe une constante A telle que

$$\int_{t_i}^{t_f} h'(t)\left[-\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2}U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3}U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right] dt \leq 0$$

3. Soit $h(t)$ telle que

$$h'(t) = -\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)) \tag{2}$$

   (a) Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifiant (2) et $h(t_i) = h(t_f) = 0$.

   (b) Montrer qu'on a alors
$$\forall t \in [t_i, t_f], \quad h'(t) = 0$$

   (c) En déduire qu'une condition nécessaire pour que $\tilde{x}$ soit solution de (1) et vérifie *CIF* est

$$\forall t \in [t_i, t_f], \quad \frac{d}{dt}\left(\partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right) = \partial_{z_2} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)) \tag{3}$$

Partie II.*Application de la partie I*
On s'intéresse à une entreprise produisant des vis. Cette entreprise reçoit une commande de B vis à livrer en une seule fois à la date $t = T$. On suppose qu'à la date $t = 0$ où elle reçoit la commande, elle ne posssède aucune vis en stock. On désire établir le plan de production de cette entreprise durant la période de temps $[0, T]$ de manière à minimiser le coût total de cette commande.
Le coût total instantané $C(t)$ se décompose entre :

- Le coût de stockage instantané $S(t)$. On suppose celui-ci proportionnel à la quantité stockée : lorsqu'il y a $N(t)$ vis au temps t à stocker, le coût de stockage instantané est alors $S(t) = c_1 N(t)$ avec c_1 constante positive.

- Le coût direct de fabrication instantané $F(t)$ d'une vis. Il est supposé linéairement croissant avec la vitesse de production.

On note $y(t)$ le nombre de vis fabriquées en tout temps t.

1. Que représente
$$\forall t \in [0, T], \quad w(t) = \int_0^t y(s)ds \ ?$$

2. Exprimer $y(t)$ en fonction de $w'(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

3. Quelle est la vitesse de production par vis ? Exprimer la en fonction de $w'(t)$.

4. Déterminer $w(0)$ et $w(T)$.

5. Déterminer $S(t)$ en fonction de $w(t)$.

6. Montrer que $F(t)$ s'exprime comme $F(t) = c_2 y^2(t)$, avec c_2 constante strictement positive.

7. Exprimer le coût total instantané $C(t)$ en fonction de $w(t)$ et $w'(t)$.

8. Exprimer le coût total $\mathcal{C}$ sur la période $[0, T]$.

9. Préciser le sens du problème d'optimisation suivant dans le cadre ci-dessus défini. On explicitera le sens de chacune des expressions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min_{w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})} \int_0^T c_2 (w'(t))^2 + c_1 w(t) dt \\ w(0) = 0 \\ w(T) = B \\ w(t) > 0, \ w'(t) \geq 0, \ t \in]0, T] \end{cases}$$

10. Proposer des solutions possibles au problème $(\mathcal{P})$ en appliquant le résultat (3) de la partie I question 3 (c), pour le problème $(\mathcal{P}_1)$

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \min_{w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})} \int_0^T c_2 w'^2(t) + c_1 w(t) dt \\ w(0) = 0 \\ w(T) = B \end{array} \right.$$

11. Vérifier *a posteriori* les conditions sous lesquelles ces solutions vérifient $w(t) > 0$ et $w'(t) \geq 0$ pour $t \in]0, T]$. On notera ces conditions H_1.

12. Si H_1 n'est pas respectée, que faire du point de vue du plan de production pour minimiser le coût et honorer la commande en temps voulu ?