

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGE DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)



I. Exercice

1. La série $\left| \sum_{n \geq 1} a_n z_0^n \right|$ converge par hypothèse. De plus, $\sup_{z \in \mathcal{B}(0; |z_0|)} \left\{ \sum_{n \geq 1} |a_n| |z|^n \right\}$ est convergente car $r = |z_0|$ est le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$. Donc, comme $\left| \sum_{n \geq 1} a_n z^n \right| \leq \sum_{n \geq 1} |a_n| |z|^n$, finalement, la série est uniformément convergente sur toute la boule de centre 0 et de rayon $|z_0|$.
2. (a) Soit $a_n = \frac{x^n}{n}$. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \frac{n}{n+1}$. Or $|x| \frac{n}{n+1} \leq |x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi d'après le critère de d'Alembert, cette série converge dès que $|x| < 1$. La borne supérieure de cet ensemble est par définition r , le rayon de convergence de la série, donc $r = 1$.
(b) $\ln(x+1)$.
(c) Cette série converge en tant que série alternée de Rieman dont le terme général tend vers 0.
(d) La série converge sur $[0; 1[$ car $r = 1$, et la série converge en $x = 1$; d'après la question 1, la série converge donc uniformément sur $[0, 1]$.
(e) La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est continue sur tout $] -1, +\infty$. La série est égale à $\ln(x+1)$ sur $[0, 1[$, et est uniformément convergente sur $[0, 1]$, elle est donc continue sur $[0; 1]$.
(f) Calculer

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow 1} x^n \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 1} x^n \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ par convergence uniforme} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \sum_{n \geq 1} x^n \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ par continuité de la série en } x=1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \ln(x+1) \text{ d'après la question b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x+1) = \ln(2) \text{ par continuité de la fonction } x \mapsto \ln(x+1). \end{aligned}$$

- (g) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n}$ a un rayon de convergence égal à $r = 1$ (même méthode que la série précédente). Sur $[0; 1[$, cette série est égale à $x - \arctg(x)$. Cette fonction est continue, et comme la série converge (comme série alternée de Riemann) sur $[0; 1]$, elle est continue sur $[0; 1]$. Ainsi

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - \arctg(x) = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

II. Problème

Estimation de l'erreur dans l'approximation des intégrales par la méthode de Poncelet.

Méthode 1



• A. Question préliminaire

- (a) On applique deux fois successivement le théorème de Rolle, une fois sur $[0, 1]$ aboutissant à l'existence d'un réel $\eta \in [0, 1]$, annulant la fonction G , et la seconde fois sur $[0, \eta]$ aboutissant à l'existence du réel θ demandé.
(b) On applique le théorème des accroissements finis.
- On pose $g(t) = h(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})$. Comme $h \in C^2([a; b])$ avec $a < b$, on a $g \in C^2([0, 1])$. En appliquant le A.1.(b) et le changement de variable $u = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$, on obtient le résultat demandé.

• B. Application

- Il s'agit d'une série de Riemann lorsque l'intervalle $[0; 1]$ est découpé en intervalle de longueur $1/n$ en démarrant en $1/(2n)$. L'application f étant continue sur $[0; 1]$ cette série converge vers une limite l égale à $\int_0^1 f(x)dx$.
-

$$\begin{aligned} |S_n - l| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + \frac{1}{n^3 24} f''(\varepsilon_k) \right) \right| \quad \text{avec } \varepsilon_k \in [k/n; (k+1)/n] \\ &\leq \frac{\|f''\|_{\infty}}{24n^3} \end{aligned}$$

$$\text{où } \|f''\|_{\infty} = \sup_{x \in [0; 1]} |f''(x)|.$$

3.

$$\begin{aligned} l - S_n &= \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2k+1}{2n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^3} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^3} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{4} \right) \\
&= \frac{1}{12n^2}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $f''(x) = 2$ ainsi $\|f''\|_\infty \leq 2$ et la borne (1) vaut $\frac{1}{12n^2}$. La borne (1) est donc optimale.



Méthode 2

1. Soit f affine, c'est à dire qu'il existe a et b deux réels tels que $f(x) = ax + b$, pour tout x réel. On a alors (après calculs)

$$\begin{aligned}
R_n(f) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a \frac{2k+1}{2n} + b \right) - \int_0^1 ax + b dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Il s'agit simplement du développement de Taylor avec reste intégral.

3.

$$\begin{aligned}
R_n(f) &= R_n(f(0) + xf'(0)) + R_n\left(\int_0^1 \varphi_t(x) f''(t) dt\right) \text{ car } R_n \text{ est linéaire} \\
&= 0 + \int_0^1 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_t\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \int_0^1 \varphi_t(x) dx \right) f''(t) dt \\
&= \int_0^1 R_n(\varphi_t) f''(t) dt.
\end{aligned}$$

4. (a) $K_n(t)$ est un polynôme de degré 3 par dérivables par morceaux.

(b)

$$\int_0^1 |K_n(t)| dt = \frac{1}{24n^2}.$$

(c)

$$\begin{aligned}
|R_n(f)| &= \left| \int_0^1 R_n(\varphi_t) f''(t) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |R_n(\varphi_t)| |f''(t)| dt \\
&\leq \int_0^1 |K_n(t)| |f''(t)| dt \\
&\leq \sup \|f''\| \int_0^1 |K_n(t)| dt = \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2}.
\end{aligned}$$