ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

I. Exercice

Soit z un nombre complexe et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On dit que $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ est le rayon de la série $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ si r est la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels positifs R tels que pour tout $|z| \leq R$, la série est absolument convergente où $|\ .\ |$ désigne le module d'un nombre complexe.

1. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série de rayon r fini. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, tel que $|z_0| = r$. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} a_n z_0^n$ est convergente, alors $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ est uniformément convergente sur $[0, z_0]$.

2. Soit une réel x. On considère la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$
   (a) Quel est son rayon ?
   (b) Que vaut cette série pour tout $x \in]-1, 1[$?
   (c) Quel est le comportement de cette série pour $x = 1$?
   (d) Quel est le comportement de cette série sur $[0, 1]$?
   (e) Que dire de la régularité de la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ lorsque $x \in [0, 1]$?
   (f) Calculer
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(g) Déterminer de la même manière la valeur de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}.$$

II. Problème

Estimation de l'erreur dans l'approximation des intégrales par la méthode de Poncelet.

<u>**Méthode 1**</u>

- **A. Question préliminaire**

1. Soit g une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[-1;1]$. Soit l'application G de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0;1], \quad G(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0) - Kx^3$$

où K est une constante que l'on choisira de telle sorte que $G(1) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe un réel $\theta \in]0;1[$ tel que

$$K = \frac{g'(\theta) - g'(-\theta)}{6\theta}.$$

(*on pensera à utiliser le théorème de Rolle*)

(b) En déduire qu'il existe un réel $\eta \in]-1;1[$ tel que $K = \frac{1}{3}g''(\eta)$.

2. Montrer à l'aide du **A.**1.(b) que si h est une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ $(a < b)$, alors il existe un réel $\xi \in]a;b[$ tel que

$$\int_a^b h(t)dt = (b-a)h\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}h''(\xi).$$

- **B. Application**

Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[0;1]$. On pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right).$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge lorsque n tend vers $+\infty$. Donner une expression de sa limite l.

2. Montrer que

$$|S_n - l| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2}, \tag{1}$$

où $\|f''\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f''(x)|$.

3. Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $l - S_n = \dfrac{1}{12n^2}$. En déduire que la borne (1) de $|S_n - l|$ est optimale (c'est-à-dire du même degré en $\dfrac{1}{n}$).

Méthode 2

Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[0;1]$. On pose

$$R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \int_0^1 f(x)dx.$$

1. Montrer que si l'application f est affine, alors $R_n(f) = 0$.
2. Montrer que si l'application f est deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[0;1]$, alors pour tout $x \in]0;1[$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^1 \varphi_t(x)f''(t)dt,$$

   où $\varphi_t(x) = \sup(0; x-t)$.
3. Montrer que si f est deux fois continûment dérivable sur $[0;1]$,

$$R_n(f) = \int_0^1 R_n(\varphi_t)f''(t)dt.$$

4. On définit maintenant le noyau de Péano par $K_n(t) = R_n(\varphi_t)$.
   (a) Décrire $K_n(t)$.
   (b) Montrer que

$$\int_0^1 |K_n(t)|dt = \frac{1}{24n^2}.$$

   (c) En déduire que si f est deux fois dérivable sur $[0;1]$, alors

$$|R_n(f)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2}.$$