AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGE DE l'EPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice 1.

1. Soit le rationnel 1. On a pour tout rationnel $x = \frac{p}{q}$, $x + 1$ qui est un rationnel puisque $\frac{p}{q} + 1 = \frac{p+1}{q}$ qui est également un rationnel. Ainsi $f(x) = f(x+1) = 1$. Maintenant, soit x irrationnel, $x + 1$ est alors un irrationnel, et $f(x+1) = g(x) = 0$. Ainsi 1 est une période non nulle de f, et f est périodique.

2. Soit a une période de f. On a pour tout x réel $f(x+a) = f(x)$. En particulier, si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec p et $q \neq 0$ deux entiers relatifs, $f(x) = 1$ donc $f(x+a) = 1$. Ce qui implique que $x + a$ est rationnel. Ainsi il existe p' et $q' \neq 0$ tels que $x + a = \frac{p'}{q'}$ où encore $a = \frac{p'q - pq'}{qq'}$. Ainsi a est rationnel.

3. Soient a un rationnel quelconque et x un réel. On a alors soit x et $x + a$ rationnels soit x et $x + a$ irrationnels.

4. Ainsi tout rationnel est une période de f or le groupe des rationnels n'admet pas de plus petit élément.

Exercice 2.

1. On a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La suite de terme général f_n converge donc uniformément vers la fonction identiquement nulle.

2. Pour tout n entier non nul, f_n est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$. Enfin, la fonction identiquement nulle est également dérivable, de dérivée nulle.

3. Soit $x = \pi$, $f_n'(\pi) = (-1)^n\sqrt{n}$ est une série alternée divergente. Ainsi, bien que la suite (f_n) soit uniformément convergente, que f_n soit dérivable en tout point et que la limite de (f_n) soit dérivable, la suite des dérivées (f_n') n'est pas convergente.

Problème

- **Préliminaires.**

1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx &= \int_{x \geq t} x^2 f(x)dx + \int_{x<t} x^2 f(x)dx \\
&\geq \int_{x^2 \geq t^2} x^2 f(x)dx \quad \text{car le second terme est toujours positif} \\
&\geq t^2 \int_{x \geq t} f(x)dx \quad \text{car le second terme est toujours positif.}
\end{aligned}$$

Ou encore
$$\forall t > 0, \quad 1 - F_Y(t) \leq \frac{\mathbb{E}(Y^2)}{t^2} \tag{1}$$

2. Comme f est une densité strictement positive on a $F'_Y(x) = f(x) > 0$. On a F_Y est strictement croissante.
3. $P(Y - \mu > t) = 1 - P(Y \leq t + \mu) = 1 - F_Y(t + \mu)$.
4.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) \\ &= P(\sigma Z + \mu \leq t) \\ &= P(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}) \end{aligned}$$

5. $\mathbb{E}[(t - \mathbf{Y})^2] = t^2 - 2t\mu + \sigma^2 + \mu^2$. Pour $t = \mu$, $\mathbb{E}[(\mathbf{Y} - \mu)^2] = \sigma^2$.
6. On considère ici $\mu = 0$. Montrer que, pour tout réel $t > 0$:

$$\begin{aligned} t &= \mathbb{E}(t - Y) \\ &= \mathbb{E}((t - Y)(\mathbb{1}_{Y<t} + \mathbb{1}_{Y \geq t})) \\ &\leq \mathbb{E}((t - Y)(\mathbb{1}_{Y<t})) \quad \text{car } \mathbb{E}((t-Y)\mathbb{1}_{Y \geq t}) \text{ est négatif} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}((t-Y)^2)\mathbb{E}(\mathbb{1}^2_{Y<t})} \quad \text{par l'inégalité de Cauchy Schwarz.} \end{aligned}$$

- **Question 1.**

1. Soit t tel que $F_Y(t) = p$. Par 1, on a, en remplaçant $F_Y(t)$ par p, et pour t et p tels que $1 - p \neq 0$,
$$1 - p \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$
On conclut en appliquant une racine carrée.
2. Comme $F_Y(\tilde{t}) = \tilde{p} = F_Z(\tilde{t} - \mu)$, et que Z à une espérance nulle, on applique le résultat de la question précédente avec $t = \tilde{t}\mu$ et $p = \tilde{p}$.
3. On cherche un majorant de t tel que $F_Y(t) = 90\% = p$. On utilise la question précédente pour conclure.

- **Question 2.**

1. On utilise le préliminaire 5 et on obtient $\mathbb{E}((t - Y)^2) = t^2 + 1$. Puis en injectant ce résultat dans (1) on a $t \leq \sqrt{(t^2 + 1)\mathbb{P}(Y < t)}$ ce qui permet de conclure.
2. Comme $F_Y(t) = p$, avec la question précédente on conclut.
3. On pose $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ avec $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $var(Z) = 1$. En remarquant que $F_Y(t) = p \Longleftrightarrow F_Z(\frac{t-\mu}{\sigma}) = p$ et en posant $\tilde{t} = \frac{t-\mu}{\sigma}$ et $\tilde{p} = p$, avec le résultat de la question précédente on conclut.
4. On remplace par $p = 90\%$.

- **Question 3.**

1. Il permet de donner très rapidement un majorant de tout décile qui n'est pas trop grossier.

2. Ce résultat est généralisable à toute variable aléatoire admettant une variance. Le problème qui peut se poser est au niveau de l'inverse de la fonction de répartition. En effet dans le cas de variable dont la densité s'annule, ou de variable discrète par exemple, la fonction de répartition n'est pas toujours strictement croissante. Il suffit alors de considérer l'inverse comme étant le sup de l'ensemble des réels t pour lesquels $F_Y(t) = p$. Tous les résultats énoncés s'appliquent alors en raison du sens des inégalités montrées.