

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**CALCUL NUMÉRIQUE**

**(Durée de l'épreuve : 2 heures)**

**Exercice 1.**

On rappelle le résultat suivant : on dit que le nombre réel  $p \neq 0$  est une période de l'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  si pour tout  $x$  réel,  $f(x+p) = f(x)$ . On dit alors que  $f$  est périodique. Si de plus  $f$  est continue non constante, elle admet une plus petite période strictement positive appelée la période de  $f$ .

On note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des rationnels et on considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



1. Montrer que  $f$  est périodique.
2. Soit  $a$  une période de  $f$ , montrer que  $a$  est rationnel.
3. Soit  $a$  un rationnel quelconque, considérons  $x$  réel, quelle est la nature de  $x$  et  $x+a$  : rationnel, irrationnel ?
4. Montrer que le groupe des périodes de  $f$  n'a pas de plus petit élément.

**Exercice 2.**

Soit  $f_n$  le terme général d'une suite de fonctions de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément et préciser sa limite.
2. Les fonctions  $f_n$  sont-elles dérivables ? La limite simple de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est-elle dérivable ?
3. Soit  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite des dérivées premières de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Quelle est la nature de  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ? Conclure.

## Problème

Soit  $Y$  une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité notée  $f$ , strictement positive sur tout  $\mathbb{R}$ . On suppose dans tout le problème que cette variable admet une espérance notée  $\mu$  et une variance notée  $\sigma^2 > 0$ . On note  $p$  un réel appartenant à  $]0; 1[$ ,  $F_Y$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Y$  et  $\mathbb{E}(g(Y))$  l'espérance de  $g(Y)$  lorsque cette espérance existe. On définit  $F_Y$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \int_{-\infty}^t f(y)dy.$$

### • Préliminaires.



1. Soit  $t$  un réel quelconque. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \geq t^2 \int_t^{+\infty} f(x)dx.$$

Ecrire cette inégalité en utilisant la fonction  $F_Y$  et l'espérance de  $Y^2$ .

2. La fonction de répartition  $F_Y$  est-elle strictement monotone ?
3. Exprimer  $\mathbb{P}(Y - \mu > t)$  à l'aide de la fonction de répartition de  $Y$ .
4. On note  $Z$  la variable définie par :

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}.$$

Soit  $t$  un réel quelconque. Exprimer  $F_Y(t)$  à l'aide de la fonction de répartition de  $Z$ .

5. Soit  $t$  un réel quelconque. Exprimer  $\mathbb{E}[(t - Y)^2]$  en fonction de  $t, \mu, \sigma^2$ . Que vaut cette expression pour  $t = \mu$  ?
6. On considère ici  $\mu = 0$ . Montrer que, pour tout réel  $t > 0$  :

$$t \leq \sqrt{\mathbb{E}((t - Y)^2)} \sqrt{\mathbb{P}(Y < t)}. \quad (1)$$

### • Question 1.

1. On supposera dans cette question que  $Y$  est d'espérance nulle :  $\mu = 0$ . Soit  $p \in ]0; 1[$ , montrer que, pour tout élément  $t > 0$  tel que  $F_Y(t) = p$ , on a :

$$t \leq \sigma \sqrt{\frac{1}{1-p}}.$$

2. L'espérance  $\mu$  est maintenant quelconque. Soit  $p \in ]0; 1[$ . Dédurre des questions précédentes que, pour tout élément  $t > 0$  tel que  $F_Y(t) = p$ , on a :

$$t \leq \sigma \sqrt{\frac{1}{1-p}} + \mu.$$

3. Montrer que le neuvième décile de la loi de  $Y$  peut être majoré par :

$$\sigma\sqrt{10} + \mu.$$

- **Question 2.** Le but de cette question est d'affiner l'inégalité obtenue précédemment.

1. On suppose ici que  $\mu = 0$  et  $\sigma^2 = 1$ . Dédurre des questions préliminaires que, pour tout réel  $t > 0$  :

$$\mathbb{P}(Y > t) \leq \frac{1}{t^2 + 1}.$$

2. Soit  $p \in ]0; 1[$ . La variable aléatoire  $Y$  est toujours telle que  $\mu = 0$  et  $\sigma^2 = 1$ . En déduire que, pour tout réel  $t > 0$  tel que  $F_Y(t) = p$ , on a :

$$t \leq \sqrt{\frac{p}{1-p}}.$$

3. L'espérance  $\mu$  et la variance  $\sigma^2 > 0$  de  $Y$  sont maintenant quelconques. Soit  $p \in ]0; 1[$ . Montrer que, pour tout réel  $t > 0$  tel que  $F_Y(t) = p$ , on a :

$$t \leq \sigma \sqrt{\frac{p}{1-p}} + \mu. \quad (2)$$

4. Montrer que le neuvième décile de la loi de  $Y$  peut être majoré par :

$$3\sigma + \mu.$$



- **Question 3.**

1. Quelle est l'utilité d'un tel résultat ?
2. Diriez-vous que le résultat (2) est généralisable à tout type de variable aléatoire ? Argumenter précisément la réponse donnée.