ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1.

Soient, pour tout n entier naturel non nul, les séries de terme général u_n et w_n définies par

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \\ w_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

1. La série de terme général w_n est-elle une série convergente ?
2. La série de terme général u_n est-elle une série convergente ?
3. Montrer que u_n et w_n sont des suites équivalentes lorsque n tend vers l'infini.
4. Y-a-t il contradiction entre les trois points précédents ? Justifiez soigneusement votre réponse.

Exercice 2.

On dit qu'un élément a réel est une valeur d'adhérence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a.

Soit la suite définie pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = n\left(1 + (-1)^n\right).$$

1. Définir les sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indicées par les entiers pairs, et par les entiers impairs respectivement. Les calculer.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède-t elle une valeur d'adhérence ?
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t elle ?
4. Sous quelles conditions, une suite réelle ayant une valeur d'adhérence converge-t elle ?

Exercice 3.

Soit le système différentiel (*) suivant :

$$(*) \quad \begin{cases} f'(x) &= 3(f(x))^{\frac{2}{3}} \\ f(0) &= 0 \end{cases}$$

Les graphes de la figure **FIG.1** présentent les courbes représentatives $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

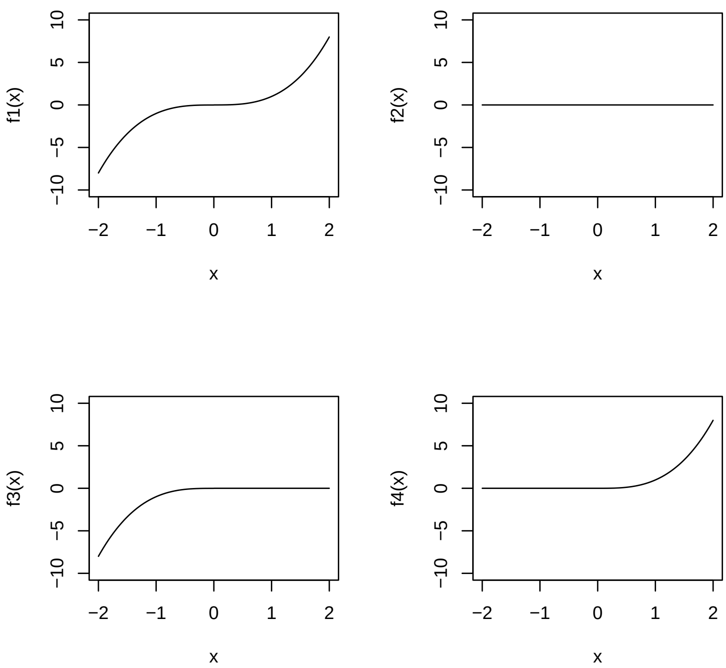

Fig. 1 – Courbes représentatives $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

1. A l'aide des graphes de la figure **FIG.1**, déterminer laquelle (lesquelles) des applications f_1, f_2, f_3 ou f_4 est (sont) solution (s) du système différentiel (*).
2. Y-a-t il contradiction avec le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Exercice 4.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |x|$$

   (b) Montrer que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

   (c) Pour x non nul, la fonction f est-elle dérivable ? Dans l'affirmative, exprimer sa dérivée.

   (d) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases} .$$

   Cette fonction g admet-elle une limite en 0 ?

   (e) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

2. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \{0\} \cup [1;+\infty[\cup \left(\bigcup_{n\geq 1}[\frac{1}{4^n};\frac{2}{4^n}[\right) \\ 4^n x - 2 & \text{pour } x \in \bigcup_{n\geq 1}[\frac{2}{4^n};\frac{3}{4^n}[\\ -4^n x + 4 & \text{pour } x \in \bigcup_{n\geq 1}[\frac{3}{4^n};\frac{1}{4^{n-1}}[\end{cases}$$

   enfin, $h(-x) = h(x)$.

   (a) Montrer que l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

   (b) Tracer la courbe représentative de h pour $x \in [\frac{1}{16};\frac{3}{2}]$ dans un repère orthonormé (O,i,j) : une unité sera représentée par 10 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée.

   (c) Calculer $h(\frac{3}{4^n})$. La fonction h est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier soigneusement la réponse.

   (d) Calculer en fonction de n les trois intégrales suivantes en utilisant au maximum la structure géométrique des courbes représentatives de ces fonctions

$$\int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx, \quad \int_{\frac{1}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx, \quad \int_{\frac{1}{4^n}}^{1} h(x)dx.$$

   (e) En déduire la valeur de $\int_0^1 h(x)dx$.

   (f) Soit y un réel positif. La fonction h est-elle intégrable sur $[0;y]$?

   (g) On pose

$$H(y) = \int_0^y h(x)dx.$$

      i. Montrer que la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

      ii. Quelle est la dérivée de H ? Est-elle majorée ?

      iii. Calculer

$$H\left(\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad H\left(\frac{2}{4^n}\right).$$

iv. Soit

$$\mathcal{H}(x) = \frac{H(x)}{x}.$$

Calculer

$$\mathcal{H}\left(\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}\left(\frac{2}{4^n}\right).$$

La fonction $\mathcal{H}$ admet-elle une limite en 0 ?

(h) La fonction H est-elle dérivable en 0 ?