AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice

1. (a) Première méthode

   i. Pour tout entier $n \geq 1$,

   $$u_n - v_n = \frac{1}{n^2(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n})}.$$

   Donc la série de terme général (t.g.) $u_n - v_n$ est une série positive équivalente à la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ qui est convergente par Riemann.

   ii. Comme v_n est le t.g. d'une série alternée dont le terme de signe constant est $\frac{1}{n}$ tendant vers 0. Ainsi, la série de t.g. v_n converge. Comme $u_n - v_n$ est le t.g. d'une série convergente on a la série de t.g. qui est la somme des deux précédentes $u_n - v_n + v_n = u_n$ qui est donc convergente.

   (b) Seconde méthode

   i. Pour x au voisinage de 0, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$.

   ii. Pour tout n grand, on a $\frac{(-1)^n}{n}$ qui est proche de 0, ainsi

   $$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o(\frac{1}{n})\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

   iii. Le premier terme du développement de u_n est convergent comme t.g. d'une série alternée, tandis que le second est le t.g. d'une série convergente d'après Riemann. Enfin $|o(\frac{1}{n^2})| < \frac{1}{n^2}$ qui sont des t.g. positifs, avec le majorant t.g. d'une série convergente.

2. (a) Première méthode

   i. Pour tout entier $n \geq 1$, on prend $v_n = -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

   ii. Le t.g.

   $$u_n - v_n = \frac{C - 1}{(n+1)(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}})}$$

   est un t.g. à termes de signes constants équivalent à $\frac{C-1}{n+1}$. Ce t.g converge si et seulement si $C = 1$.

   iii. Comme v_n est le t.g. d'une série convergente (série alternée), on en conclut que u_n est le t.g. d'une série convergente si et seulement si $C = 1$.

(b) Seconde méthode

   i. On effectue un DL à l'ordre 1 autour de 0 de la fonction $\frac{1}{1-x}$. Soit $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$.

   ii. On développe u_n autour de $x = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

   iii. Comme précédemment, on a une somme de t.g. d'une série alternéee et d'une série convergente si et seulement si $C = 1$.

Problème

1. Matrice de Vandermonde

(a)

$$VM_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$VM_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$det(VM_1(x)) = x_1 - x_0.$$

(d)

$$\begin{aligned}
det(VM_2(x)) &= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ x_0^2 - x_0^2 & x_1^2 - x_0 x_1 & x_2^2 - x_0 x_2 \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ 0 & x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) \end{pmatrix} \\
&= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\
&= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = \prod_{0=j<k=2} (x_k - x_j).
\end{aligned}$$

(e) On suit l'indication donnée pour $p \geq 2$

$$det(VM_p(x)) \quad = \quad \prod_{k_0=0}^{p} (x_{k_0} - x_0) det(VM_{p-1}(x_1, \ldots x_p))$$

Or, par hypothèse de récurrence

$$det(VM_{p-1}(x_1, \ldots, x_p)) = \prod_{1=j<k=p} (x_k - x_j).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} det(VM_p(x)) &= \prod_{k_0=1}^{p}(x_{k_0}-x_0)\prod_{1=j<k=p}(x_k-x_j) \\ &= \prod_{0=j<k=p}(x_k-x_j). \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $p=2$, par ailleurs $det(VM_1(x))$ vérifie également cette hypothèse, ce qui achève la preuve pour tout $p \geq 1$.

(f) $det(VM_p(x)) = 0 \Longleftrightarrow \prod_{0=j<k=p}(x_k-x_j) = 0 \Longleftrightarrow \exists (j,k) \in \{0,\dots,p\}$ avec $j<k$, tels que $x_j = x_k$.

2. Matrice de Hankel

(a)

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ x_0 & x_1^2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$H_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 \\ x_0 & x_1^2 & x_2^3 \\ x_0^2 & x_1^3 & x_2^4 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$H_3(x)\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 & x_3^3 \\ x_0 & x_1^2 & x_2^3 & x_3^4 \\ x_0^2 & x_1^3 & x_2^4 & x_3^5 \\ x_0^3 & x_1^4 & x_2^5 & x_3^6 \end{pmatrix}.$$

(d) $det(H_1(x)) = x_1^2 - x_0x_1$ ou encore (en utilisant les substitutions de lignes)

$$\begin{aligned} det(H_1(x)) &= det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_1^2 - x_0x_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_1-x_0). \end{aligned}$$

Et, suivant la même méthode, $\det(H_2(x)) = x_1x_2^2(x_2-x_1)(x_2-x_0)(x_1-x_0)$

(e)

$$\det(H_2(x)) = \prod_{j=1}^{2} x_j^j \prod_{0=j<k=p}(x_k-x_j).$$

(f) On utilise les substitutions de lignes préconisées

$$det(H_3(x)) = \prod_{j=1}^{3} x_j^j det(VM_3(x_0,\dots,x_3)).$$

(g) On procédera par récurrence. L'hypothèse de récurrence étant :

$$det(H_p(x)) = \prod_{j=1}^{p} x_j^j det(VM_p(x_0,\dots,x_p)).$$

Cette hypothèse est vérifiée au rang $p = 1$. Et on a

$$det(H_p(x)) = \prod_{j=1}^{p} x_j^j det(VM_p(x_0, \ldots, x_p)).$$

(h)

$$det(H_p(x)) = \prod_{j=1}^{p} x_j^j \prod_{0=j<k=p} (x_k - x_j).$$

(i) $det(H_p(x)) = 0$ signifie soit qu'il existe une valeur x_k nulle soit (sans exclusivité) qu'il existe deux valeurs x_j et x_k telles que $x_j = x_k$.

3. Aléa et matrice de Hankel.

(a)

$$EH_1(X) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) \end{pmatrix}.$$

(b)

$$EH_2(X) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) \\ \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) \\ \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) \end{pmatrix}.$$

(c)

$$EH_3(X) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) \\ \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) \\ \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) & \mathbb{E}(X^5) \\ \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) & \mathbb{E}(X^5) & \mathbb{E}(X^6) \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\mathbb{E}(H_p(X_0, \ldots, X_p)) = \mathbb{E}\left(\left(X_j^{i+j}\right)_{i,j=0,\ldots,p}\right) = \left(\mathbb{E}(X^{i+j})\right)_{i,j=0,\ldots,p}.$$

(e) $EH_p(X) = \mathbb{E}(H_p(X_0, \ldots, X_p))$.

(f) On a $(p+1)!$ permutations possibles. Et comme $\mathbb{E}(X_k^j) = \mathbb{E}(X_{\sigma(k)}^j)$ quelle que soit la permutation σ considérée de $\mathcal{S}_{p+1} = \{0, \ldots, p\}$, on a $EH_p(X) = \mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \ldots, X_{\sigma(p)}))$. Ou encore

$$EH_p(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1}} \frac{1}{(p+1)!} \mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \ldots, X_{\sigma(p)})).$$

(g) $(X_1, X_0, X_2, \ldots, X_p)$ est une permutation de $(X_0, \ldots, X_p)$, et l'espérance d'une matrice étant égale à la matrice des espérances (car somme finie) d'après ce qui précède, on a

$$EH_p(X) = \mathbb{E}(H_p(X_1, X_0, X_2 \ldots, X_p)).$$

(h)

$$\begin{aligned} det(EH_p(X)) &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1}} det(\mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \ldots, X_{\sigma(p)}))) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1}} \mathbb{E}\left(det((H_p(X_{\sigma(0)}, \ldots, X_{\sigma(p)})))\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathbb{E}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{p+1}}\left(\prod_{i=0}^{p} X_{\sigma(i)}^{i}\epsilon(\sigma)\prod_{0=j<k=p}(X_k-X_j)\right)\right)\\
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathbb{E}\left(\prod_{0=j<k=p}(X_k-X_j)\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{p+1}}\left(\epsilon(\sigma)\prod_{i=0}^{p} X_{\sigma(i)}^{i}\right)\right)\\
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathbb{E}\left(\prod_{0=j<k=p}(X_k-X_j)^2\right)
\end{aligned}
$$

(i) $det(EH_p(X)) = 0$ implique qu'il existe deux valeurs prises par X_k et X_j égales. Or comme X ne peut prendre que q valeurs distinctes, on a $q < p$. Pour tout $q \geq p$, on aura $det(EH_p(X)) > 0$

4. Ainsi la quantité $det(EH_p(X))$ permet à partir de la connaissance des $2p$ premiers moments de la variable X, d'établir le nombre de valeurs $a_1, \ldots, a_q$ distinctes sur lesquelles la variable X prend ses valeurs. Il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs a_i elles-mêmes pour cela car le calcul de $det(EH_p(X))$ ne les demande pas.