ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice

Soient u_n et v_n les termes généraux d'une série.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ensemble des entiers naturels non nuls, on considère

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}} \\ v_n &= \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

   (a) Première méthode
      i. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n - v_n$?
      ii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

   (b) Seconde méthode
      i. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\frac{1}{1+x}$.
      ii. En déduire un développement de u_n.
      iii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère maintenant

$$u_n = \frac{C - (-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1) - (-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}$$

   où C est une constante réelle. On désire déterminer la nature de la série de terme général u_n selon les deux méthodes employées dans l'exemple précédent **1.**.

(a) Première méthode

i. Déterminer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ permettant de procéder comme en **1. (a)**.

ii. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - v_n$.

iii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

(b) Seconde méthode

i. Exprimer le développement limité d'une fonction que l'on précisera en 0, à un ordre que l'on précisera également.

ii. En déduire un développement de u_n pour n grand.

iii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Problème

On observe un phénomène aléatoire. On désire construire une fonction permettant de déterminer si on a affaire à un aléa prenant ses valeurs sur au plus p quantités (non connues) ou un autre type d'aléa (plus de p quantités, aléa continu, etc.). On ne connaît de X que la valeur de ses $2p+1$ premiers moments.
Soient p un entier non nul et $x = (x_0, \ldots, x_p)$ un $(p+1)$-uplet réel.

1. Matrice de Vandermonde

On note $VM_p(x)$ la matrice de Vandermonde définie pour tout $p \geq 1$ par

$$VM_p(x) = \left(x_j^i\right)_{i,j=0,\ldots,p}.$$

(a) Exprimer matriciellement $VM_1(x)$.

(b) Exprimer matriciellement $VM_2(x)$.

(c) Calculer le déterminant (det) de $VM_1(x)$.

(d) Exprimer le déterminant (det) de $VM_2(x)$ en fonction de

$$\prod_{0=j<k=2} (x_k - x_j).$$

(e) Montrer par récurrence que pour tout $p \geq 1$,

$$det(VM_p(x)) = \prod_{0=j<k=p} (x_k - x_j).$$

Indication : on pourra effectuer des transformations sur les lignes L_i avec $L_i - x_0 L_{i-1} \longrightarrow L_i$.

(f) Soit p fixé, que dire des valeurs de $(x_0, \ldots, x_p)$ si $det(VM_p(x)) = 0$?

2. Matrice de Hankel

On note $H_p(x)$ la matrice de Hankel définie pour tout $p \geq 1$ par

$$H_p(x) = \left(x_j^{i+j}\right)_{i,j=0,\ldots,p}.$$

(a) Exprimer matriciellement $H_1(x)$.

(b) Exprimer matriciellement $H_2(x)$.
(c) Exprimer matriciellement $H_3(x)$.
(d) Calculer les déterminants de $H_1(x)$ et $H_2(x)$.
(e) Exprimer le déterminant de $H_2(x)$ en fonction du déterminant de $VM_2(x)$.
(f) Exprimer le déterminant de $H_3(x)$ en fonction du déterminant de $VM_3(x)$.
Indication : utiliser des transformations sur les lignes L_i avec $L_i - x_0 L_{i-1} \longrightarrow L_i$.
(g) Exprimer le déterminant de $H_p(x)$ en fonction de celui de $VM_p(x)$.
(h) Donner une expression du déterminant de $H_p(x)$ en fonction de p et de $(x_0, \dots, x_p)$.
(i) Soit p fixé, que dire des valeurs de $(x_0, \dots, x_p)$ si $det(H_p(x)) = 0$?

3. Aléa et matrice de Hankel.

On considère maintenant X une variable aléatoire pouvant prendre q valeurs distinctes notées $a_1, \dots, a_q$. Et soient $X_0, \dots, X_p$ un $(p+1)$-uplet de variables aléatoires, indépendantes entre elles et de même loi que X.
On note $\mathbb{E}$ le signe espérance et on rappelle que si p_k désigne la probabilité que la variable X prenne la valeur a_k, le moment d'ordre j de X, $\mathbb{E}(X^j)$ est égal à

$$\mathbb{E}(X^j) = \sum_{k=1}^{q} a_k^j p_k.$$

On note $EH_k(X)$ la matrice des espérances des moments d'ordre 0 à $2k$ de la variable aléatoire X. Plus précisément, pour tout $k \geq 1$,

$$EH_k(X) = \left(\mathbb{E}(X^{i+j})\right)_{i,j=0,\dots,k}.$$

(a) Exprimer matriciellement $EH_1(X)$.
(b) Exprimer matriciellement $EH_2(X)$.
(c) Exprimer matriciellement $EH_3(X)$.
(d) Exprimer matriciellement $\mathbb{E}(H_p(X_0, \dots, X_p))$.
(e) Que dire de $EH_p(X)$ et de $\mathbb{E}(H_p(X_0, \dots, X_p))$?
(f) Combien y-a-t-il de permutations σ des éléments $\{0, , \dots, p\}$? On notera l'ensemble de ces permutations $\mathcal{S}_{p+1}$.
En déduire une expression de $EH_p(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)}))$.
(g) Que dire de $EH_p(X)$ et de $\mathbb{E}(H_p(X_1, X_0, X_2 \dots, X_p))$?
(h) Exprimer le déterminant de la matrice de Hankel des moments de X, $det(EH_p(X))$. Justifier soigneusement les inversions de signe espérance et déterminant lorsqu'il y a lieu.
Indication : On pensera à utiliser la formule de Leibnitz donnant le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,K}$ de taille $K+1$. On rappelle que la formule de Leibnitz en ce cas est

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{K+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=0}^{K} a_{\sigma(i)i}$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.
(i) Que dire de q et p lorsque $det(EH_p(X)) = 0$?

4. Conclure.