ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

La lisibilité de la copie sera prise en compte dans la notation.
Encadrer chaque résultat obtenu.
Préciser clairement lorsqu'une réponse est admise, non traitée, ou encore non totalement résolue.

Exercice

Soit la matrice C_n définie par

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$$

où les complexes $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(b_j)_{j=1,\ldots,n}$ sont tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i et j variant entre 1 et n.
On notera pour tout ce qui suit : $l_1, \ldots, l_n$ les numéros de lignes 1 à n, et $c_1, \ldots, c_n$ les numéros de colonnes 1 à n.

1. Exprimer C_1
2. Exprimer C_2
3. Calculer $det(C_1)$
4. Calculer $det(C_2)$ que l'on exprimera comme une fraction de facteurs.

5. On désire retrouver le déterminant de C_2 par une autre méthode.
   On précisera à quoi est équivalent le déterminant de C_2 lorsqu'on effectue les opérations détaillées ci-après. De plus, on veillera à écrire à chaque étape, l'expression obtenue en justifiant les simplifications éventuelles que l'on effectuera systématiquement autant que possible.
   (a) Multiplier chaque colonne c_j par $(a_2 + b_j)$, pour tout $j = 1, 2$.
   (b) Retrancher la dernière ligne l_2 à toutes les autres.
   (c) Retrancher la dernière colonne c_2 à toutes les autres.
   (d) Retrouve-t-on le déterminant de C_2 ?
6. A l'aide de la méthode proposée précédemment pour l'obtention de C_2, exprimer la formule du déterminant de C_n, dit déterminant de Cauchy, en respectant chacune des étapes soigneusement mises en valeur.

Problème

On désire étudier la densité généralisée de Pareto (GPD) et le comportement de sa fonction de survie.
On définit les objets suivants :

– On appelle densité de probabilité, la fonction $f(x)$, intégrable, positive, telle que
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$
– On note $P_X(A)$ la probabilité que X appartienne à l'ensemble A lorsque X suit la loi de densité f la quantité :
$$P_X(A) = \int_A f(x)dx.$$
– On appelle fonction de survie $S(t)$, la probabilité que X appartienne à l'ensemble $]t, +\infty[$, pour t réel :
$$S(t) = P_X(]t; +\infty[).$$
– Soit $q \geq 0$ avec $q \neq 1$. L'entropie de Rényi-Tsallis est définie sur un espace fonctionnel par l'expression suivante :
$$H_q(f) = \frac{1}{1-q}\left(\int f^q(x)dx - 1\right).$$
– L'entropie de Shannon est définie sur un espace fonctionnel dont les éléments sont à valeurs strictement positives. Elle est définie par l'expression :
$$H(f) = -\int f(x)\ln(f(x))dx,$$
où ln désigne la fonction logarithme népérien.
– Pseudo-distance de Bregman :
Soit F une fonction définie sur $\mathcal{A}$ un convexe fermé, continuement dérivable, strictement convexe, à valeurs réelles. On appelle pseudo-distance (ou divergence) de Bregman aux points a et b de $\mathcal{A}$:
$$d_F(a,b) = F(a) - F(b) - < D_b^1 F, (a-b) >,$$
où $D_b^1 F$, désigne la différentielle première de F calculée au point b et $< \, , \, >$ un produit scalaire sur $\mathcal{A}$.

A. Préliminaires :

1. Soit $f(x)$ la densité de la loi exponentielle de paramètre $\sigma > 0$ définie pour tout $x > 0$ par
$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{x}{\sigma}).$$
Calculer sa fonction de survie $S(t)$
2. Soient les paramètres $(\gamma, \sigma) \in (\mathbb{R}_*, \mathbb{R}_*^+)$. On considère S la fonction de survie définie pour tout t réel, par
$$S(t) = \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma}t\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$
Calculer la densité f de la loi correspondant à cette fonction de survie dans les cas :
   (a) $\gamma \neq 0$,
   (b) $\gamma = 0$ (on définit alors la fonction de survie par sa limite lorsque γ tend vers 0).
3. Calculer la limite de H_q lorsque q tend vers 1 et f est une densité de probabilité.
Que remarque-t-on ?

B. Maximisation sous contraintes :

Soient μ et θ deux réels finis. Pour $0 < q < 1$, on désire résoudre le problème de maximisation suivant :
$$\begin{cases} \max_{G \in \mathcal{F}} H_q(G) \\ avec \int_0^{+\infty} xG(x)dx = \mu \;\; et \;\; \int_0^{+\infty} G(x)dx = \theta \end{cases} \tag{1}$$
où $\mathcal{F} = \{G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\}$.

1. On considère la divergence de Bregman $B(f, g)$ définie par
$$\int d_F(a; b)dx$$
calculée aux points $a = f$ et $b = g$, f et g étant deux densités de probabilité, le produit scalaire sur $\mathbb{R}$ étant $< x; y >= xy$, pour la fonction convexe $F : x \mapsto -x^q$.
Exprimer $B(f, g)$ en fonction de f, g et q.
2. Pour $q \neq 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$, on pose
$$G^*(x) = \alpha^{\frac{1}{q-1}}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}x\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$
   (a) Exprimer en fonction de G, q et G^* la pseudo-distance de Bregman $B(G, G^*)$ lorsque G vérifie (1).
   (b) Montrer alors que
   $$\int G(x)G^*(x)^{q-1}dx = \int G^*(x)^q dx.$$
   (c) Montrer que "$B(G, G^*)$ positive ou égale à zéro" équivaut à "$G = G^*$".
   (d) En déduire une inégalité entre $H_q(G^*)$ et $H_q(G)$. On précisera le domaine d'appartenance de q.
   (e) Conclure quant au problème de maximisation sous contraintes que l'on se proposait de résoudre.
   (f) Que dire dans le cas de l'entropie de Shannon (cas $q = 1$) ? (on explicitera les valeurs de μ, θ, G^* ainsi que la valeur de l'entropie de Shannon en le point atteignant ce maximum).