AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice

1. Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = -(\lambda-1)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i).$$

Le polynôme caractéristique étant scindé dans $\mathbb{C}$, la matrice est diagonalisable.

2. Le vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ vérifie $A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1$, c'est-à-dire $x_1 = -y_1$ et $z_1 = 0$. On peut prendre, par exemple, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De la même manière on obtient pour $\lambda_2 = 1+i$ et $Av_2 = \lambda_2 v_2$, que $x_2 = -(1+i)y_2$ et $y_2 = -(1-i)z_2$. Donc, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_3 = 1-i$ et $Av_3 = \lambda_3 v_3$, que $x_3 = -(1-i)y_3$ et $y_3 = -(1+i)z_3$. Donc, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1+i & -1-i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -i & -i & 1+i \\ i & i & 1-i \end{pmatrix}.$$

3. On utilise la diagonalisation de la matrice pour écrire $A^9 = P \cdot D^9 \cdot P^{-1}$. On obtient

$$A^9 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 16(1-i) \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 33 & 32 & -2 \\ -1 & 0 & -30 \\ 16 & 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème I. *Polynômes d'interpolation de Lagrange*

1. On a $L_k(x_\ell) = \frac{\Pi_{j=0, j\neq k}^n (x_\ell - x_j)}{\Pi_{j=0, j\neq k}^n (x_k - x_j)}$. Si $\ell = k$ alors on a les mêmes termes au numérateur et au dénominateur et $L_k(x_k) = 1$, si $\ell \neq k$ il y a forcément un facteur au numérateur qui s'annule, donc $L_k(x_\ell) = 0$.

2. On a

$$L(x_\ell) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x_\ell) = f_\ell.$$

Pour chaque terme dans la somme, il y a n facteurs au numérateur, donc le degré du polynôme L est inférieur ou égal à n.

3. Supposons, par absurde, qu'il existe L et P deux polynômes de degré au plus n et tels que $L(x_\ell) = P(x_\ell) = f_\ell$ pour tout $\ell \in \{0, ..., n\}$. Alors, le polynôme $L - P$ est de degré au plus n et il a $n+1$ racines distinctes. Ça implique que $L(x) - P(x) = 0$ pour tout x, d'où l'unicité.

II. *Intégration numérique*

1. **a)** Le développement de Taylor à l'ordre n, de $f(x)$ en a, avec reste intégral s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Soit P_n le polynôme de degré n et R_n le reste dans le développement de Taylor précédent.

Il est évident que $(x-t)^n I_{[a,x]}(t) = (x-t)_+^n I_{[a,b]}(t)$ et R_n s'écrit comme demandé.

b) On remarque que $E(f)$ est linéaire en f et on remplace f par son développement de la question précédente, donc $E(f) = E(P_n) + E(R_n)$.

Par hypothèse, le procédé est exact pour les polynômes de degré au plus n et P_n est de degré au plus n, donc $E(P_n) = 0$. Ensuite

$$\begin{aligned}
E(f) &= E(R_n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k R_n(x_k) - \int_a^b R_n(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) G_t(x_k)dt - \int_a^b \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) G_t(x)dtdx \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k G_t(x_k) - \int_a^b G_t(x)dx \right) dt \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) K_n(t)dt.
\end{aligned}$$

c) On en déduit

$$\begin{aligned}
|E(f)| &\leq \frac{1}{n!} \int_a^b |f^{(n+1)}(t)||K_n(t)|dt \\
&\leq \frac{1}{n!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \int_a^b |K_n(t)|dt
\end{aligned}$$

d) La fonction $g(x) = x^{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$ et $g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, donc $E(g) = (n+1) \int_a^b K_n(t)dt$. De plus, K_n est de signe constant, alors $\int_a^b |K_n(t)|dt = (n+1)^{-1}|E(g)|$. En conclusion,

$$|E(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)||E(g)|.$$

2. **a)** D'après I, le polynôme d'interpolation de Lagrange est

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x),$$

de degré au plus n. Le procédé d'intégration est exact si

$$\int_a^b L(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Puisque, $\int_a^b L(x)dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x)dx$ on prend

$$\lambda_k = \int_a^b \frac{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(x - x_j)}{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)} dx.$$

Si $\tilde{f}$ est une fonction polynômiale de degré maximal n, telle que $\tilde{f}(x_k) = f(x_k)$, par l'unicité du polynôme d'interpolation (voir question I.3.) $\tilde{f}$ est nécessairement égale à L.

b) Pour $n = 1$, nous avons $x_0 = a$ et $x_1 = b$,

$$\lambda_0 = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx = \frac{b - a}{2} \text{ et } \lambda_1 = \int_a^b \frac{x - a}{b - a} dx = \frac{b - a}{2}.$$

Le procédé d'intégration s'écrit $f \mapsto \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$.

Pour le noyau, $G_t(x) = (x - t)_+$ pour $x \in [a, b]$ et

$$\begin{aligned} K_1(t) &= E(G_t) = \frac{b - a}{2}(G_t(a) + G_t(b)) - \int_a^b (x - t)_+ dx \\ &= \frac{(b - a)(b - t)}{2} - \int_t^b (x - t)dx \\ &= \frac{(b - a)(b - t)}{2} - \frac{(x - t)^2}{2}|_t^b = \frac{(t - a)(b - t)}{2}, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Pour l'erreur d'approximation on utilise la question II.1, pour $n = 1$, donc si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$

$$E(f) = \int_a^b f^{(2)}(t) \frac{(t - a)(b - t)}{2} dt.$$

Comme K_1 est de signe constant sur $[a, b]$

$$|E(f)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)| \cdot \int_a^b K_1(t)dt = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)| \cdot \frac{(b - a)^3}{12}.$$

III. *Méthode de Gauss*

1. Il suffit de décomposer S sur la base $P_0, ..., P_n$ de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

$c_0, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b P_{n+1}(x)S(x)dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b P_{n+1}(x)P_k(x)dx = 0.$$

2. **a)** On a

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} Q(u_k)L_k(x), \text{ où } L_k(x) = \frac{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(x-u_j)}{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(u_k-u_j)}.$$

b) Puisque $Q(u_k) = L(u_k)$, $Q - L$ est divisible par $(x - u_k)$ pour tout $k = 0, ..., n$, donc par P_{n+1}. On peut donc écrire $Q - L = S \cdot P_{n+1}$ pour un polynôme S de degré au plus $(2n+1)-(n+1) = n$. Ceci implique que

$$\int_a^b Q(u)du = \int_a^b L(u)du = \sum_{k=0}^{n} Q(u_k) \int_a^b L_k(u)du. \tag{1}$$

On peut donc poser $\lambda_k = \int_a^b L_k(u)du = (\Pi_{j\neq k}(u_k - u_j))^{-1} \int_a^b \Pi_{j\neq k}(u - u_j)du$, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$.

c) Si on prend $Q = L_j^2$, polynôme de degré $2n$, dans (1) on trouve

$$0 < \int_a^b L_j^2(u)du = \sum_{k=0}^{n} L_j^2(u_k) \int_a^b L_k(u)du = \int_a^b L_j(u)du = \lambda_j,$$

pour tout $j \in \{0, ..., n\}$.