AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I

1. Le polynôme P peut, dans le meilleur des cas, avoir 1 ou -1 comme racines. En 1, si $P(1) \neq 0$, on a

$$\frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} \sim_{x\to 1, x<1} \frac{P(1)}{\sqrt{2(1-x)}}$$

et cette fonction est intégrable sur $[1/2, 1]$, par exemple. Pareil en -1.

2. Il est facile de vérifier que pour tous P, $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $w_\theta(P + \lambda Q) = w_\theta(P) + \lambda w_\theta(Q)$.

3. Il suffit de considérer P dans $\{1, X, X^2, X^3\}$, successivement, et d'écrire le système linéaire de 4 équations :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 3 \cdot c (= \pi) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= c(x_1 + x_2 + x_3)(= 0) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(= \frac{\pi}{2}) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= c(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(= 0).
\end{aligned}$$

Solution : $\theta = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice II

1. Pour $n = 1$, nous avons $P_1(X) = 1 + X$ et $P_2(X) = 1 + X + X \cdot 1 = 1 + 2X$ des polynômes de degré 1. Si l'hypothèse est vérifiée jusqu'à n, alors le degré de $P_{2n+1}(X) = P_{2n}(X) + XP_{2n-1}(X)$ est n, ainsi que celui de $P_{2n+2}(X) = P_{2n+1}(X) + XP_{2n}(X)$.

2. L'équation caractéristique est $r^2 - r - X = 0$. Si $1 + 4X \neq 0$, elle admet deux racines distinctes $r_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1+4X})/2$. Il vient $P_n(X) = Ar_1^n + Br_2^n$ et, en utilisant P_0 et P_1, on obtient

$$P_n(X) = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}, \text{ si } X \neq -\frac{1}{4}.$$

Si $1+4X = 0$, l'équation caractéristique admet l'unique racine $r_0 = \frac{1}{2}$. Il vient $P_n(-\frac{1}{4}) = (A+Bn)r_0^n = \left(1 + \frac{n}{2}\right) \frac{1}{2^n}$.

3. Comme $P_n(-\frac{1}{4})$ ne s'annule pas, il suffit de considérer $P_n(X) = 0$ pour $X \neq -\frac{1}{4}$. Ceci implique que

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1, \text{ avec } \frac{r_1}{r_2} \neq 1.$$

Donc, $r_1/r_2 = \exp\left(\frac{2\pi ik}{n+1}\right)$, pour k entre 1 et n (les racines $(n+1)$ème de l'unité, sauf la racine 1).

Nous pouvons, par exemple, utiliser les propriétés $1 = r_1 + r_2 = r_2(1 + r_1/r_2)$ et $-X = r_1 \cdot r_2 = r_2^2(r_1/r_2)$, déduites de l'équation caractéristique, pour obtenir

$$x_k = -\frac{r_1/r_2}{(1 + r_1/r_2)^2} = \frac{-1}{\left(\exp\left(\frac{-ik\pi}{n+1}\right) + \exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\right)^2} = \frac{-1}{4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}.$$

Pour k allant de 1 à n, nous avons $\frac{k\pi}{n+1} \in \left[\frac{\pi}{n+1}, \frac{n\pi}{n+1}\right] \subseteq]0, \pi[$, donc nous avons trouvé les n racines réelles du polynôme P_n.

Exercice III

1. Avec le changement de variable $y = 1 - \frac{x}{n}$, on a $I_n = n\int_0^1 \sqrt{1 + y^n}\, dy$. Si on note $f_n(y) = \sqrt{1 + y^n}$ pour $y \in [0, 1]$, alors elle est dominée par $\varphi(y) = \sqrt{2}$ pour $y \in [0, 1]$, qui est intégrable sur ce domaine. De plus, $lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$, où $f(y) = 1$ si $y \in [0, 1[$ et $f(1) = \sqrt{2}$. Par le théorème de convergence dominée, $\int_0^1 f_n(y)dy \to \int_0^1 f(y)dy = 1$, quand $n \to \infty$. Ceci permet de conclure que $I_n \sim n$, quand n tend vers l'infini.

2. On commence par le changement de variable $y = n(x - 1)$. On a $J_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \sqrt{1 + \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}\, dy$. Maintenant on pose

$$f_n(y) = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}, \quad \varphi(y) = \sqrt{1 + e}, \quad f(y) = \sqrt{1 + e^y}.$$

Alors $|f_n(y)| \leq \varphi(y)$ sur $[0, 1]$ et φ est intégrable sur le domaine. De plus, $lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$. Par le théorème de convergence dominée, $J_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \sqrt{1 + e^y}\, dy = \frac{2}{n}(\sqrt{1 + e} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \ln(\sqrt{1 + e} + 1) + \ln(\sqrt{2} + 1))$.

Exercice IV

I. 1. Par l'absurde, supposons qu'il existe $u \in]a, b[$ où $g(u) = 0$. Par le théorème de Rolle appliqué à g sur l'intervalle $[a, u]$, il existe $v \in]a, u[$ tel que $g'(v) = 0$. Le même théorème sur $[u, b]$ implique qu'il existe $w \in]u, b[$ tel que $g'(w) = 0$. Le même théorème appliqué à g' sur $[v, w]$, implique qu'il existe $z \in]v, w[$ tel que $g''(z) = 0$ ce qui contredit les hypothèses de départ.

2. Par absurde, supposons qu'il existe un $u \in]a, b[$ tel que $g(u) > 0$. Par le théorème des accroissements finis appliqué à g sur $[a, u]$, on trouve $v \in]a, u[$ tel que $g(u)/(u - a) = g'(v)$, donc $g'(v) > 0$. Le même théorème sur l'intervalle $[u, b]$ implique qu'il existe $w \in]u, b[$, tel que $-g(u)/(b - u) = g'(w) < 0$. Pour finir, on applique le même théorème à g' sur $[v, w]$ et on trouve $z \in]v, w[$ tel que

$$g''(z) = \frac{g'(w) - g'(v)}{w - v} < 0.$$

Ceci contredit l'hypothèse $g'' > 0$ sur $[a, b]$.

II. 1. La fonction f étant continue sur $[a, b]$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, il existe au moins un point à l'intérieur de l'intervalle où elle s'annule. Si le point n'est pas unique, on aboutit à une contradiction de manière similaire à la partie I. Donc il existe une unique racine c de $f(x) = 0$, dans l'intervalle.

2. Les fonctions f' et f'' sont continues sur $[a, b]$, donc leurs images sont des intervalles (théorème des valeurs intermédiaires). Comme $f'(x) > 0$, alors $m_1 = \inf_{x\in[a,b]} f(x) > 0$. On peut prendre $m_2 = \sup_{x\in[a,b]} f''(x)$.

3. En effet, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, $g(a) = g(b) = 0$ et $g''(x) = f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. D'après I.2. on a $g(c_1) < 0$, donc $f(c_1) < 0 = f(c)$. Comme f est strictement croissante, on a que $a < c_1 < c$.

III. 1. Le polynôme

$$P_n(x) = (x - c_n)\frac{f(b) - f(c_n)}{b - c_n} + f(c_n), \text{ admet la racine } c_{n+1} = c_n - f(c_n)\frac{b - c_n}{f(b) - f(c_n)},$$

donc $c_{n+1} = \varphi(c_n)$ avec $\varphi(x) = x - f(x)(b - x)/(f(b) - f(x))$.

2. Nous avons démontré $a < c_1 < c$. Par récurrence, on peut appliquer la partie II.3 sur $[c_n, c]$ et vérifier que $c_n < c_{n+1} < c$.

3. La suite $\{c_n\}_{n\geq 1}$ est croissante et bornée supérieurement par c, donc elle converge. En supposant que $c_n \to c'$, quand $n \to \infty$, avec $c' \leq c$, on obtient par continuité de φ sur $[a, c]$ que $c' = \varphi(c')$, ce qui implique que $f(c') = 0$ et par unicité (partie II.1) on a $c' = c$.

Par un développement de Taylor de $f(c_n)$ autour de c, on obtient pour un u compris entre c_n et c :

$$f(c_n) = f(c) + (c_n - c)f'(u), \text{ donc } |c_n - c| = \frac{|f(c_n)|}{f'(u)} \leq \frac{|f(c_n)|}{m_1}.$$

Application numérique : Si on pose $a = 1,5$ et $b = 2$, on a $c_1 = 1.8095$, $c_2 = 1,8549$ et $c_3 = 1,8601$. L'erreur commise est, d'après IV.3., inférieure à $|f(c_3)|/f'(1,5) = 0,0042/2,75 = 0,0015$.