ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice I

Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à 3 et dont les coefficients sont réels.

1. Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

converge.

2. Si on note par $\theta = (c, x_1, x_2, x_3)$ un élément de $\mathbb{R}^4$, montrer que l'application

$$w_\theta : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R},$$

définie par

$$w_\theta(P) = c(P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)),$$

est une application linéaire.

3. Calculer θ tel que

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = w_\theta(P),$$

pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice II

Soit P_n la suite de polynômes réels définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = 1 + X$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$P_{n+1}(X) = P_n(X) + XP_{n-1}(X). \tag{1}$$

1. Montrer, par récurrence, que le degré des polynômes P_{2n} et P_{2n-1} est n.
2. Ecrire l'équation caractéristique de la suite récurrente linéaire (1) et donner la solution $P_n(X)$ de cette suite.
3. Montrer que toutes les racines de $P_n(X)$ sont réelles.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice III

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\, dx$$

est asymptotiquement équivalent à n, quand n tend vers l'infini.

2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1 + x^n}\, dx$$

est asymptotiquement équivalent à $\frac{C}{n}$, quand n tend vers l'infini. Calculer explicitement la constante $C > 0$.

Exercice IV

Méthode numérique d'approximation d'une racine réelle de l'équation $f(x) = 0$.

Soit l'intervalle $[a, b]$ fixé, pour $a < b$ réels.

I. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(a) = g(b) = 0$, $g''(x) > 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

1. Montrer que $g(x)$ ne s'annule en aucun x de $]a, b[$;
2. Démontrer que $g(x) < 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

II. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe un unique c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$;
2. Montrer qu'il existe m_1 et m_2 tels que

$$0 < m_1 \leq f'(x), \quad 0 < f''(x) \leq m_2 \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [a, b[;$$

3. On souhaite approximer c. Soit P le polynôme de degré 1 tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$, et soit c_1 dans $]a, b[$ tel que $P(c_1) = 0$. Démontrer que $a < c_1 < c$, en utilisant la fonction $g(x) = f(x) - P(x)$.

Fomesoutra.com
ça soutra
Docs à portée de main

III. Désormais on conserve les hypothèses de la partie II.

Soit $\{c_n\}_{n\geq 0}$ la suite récurrente définie de la façon suivante :
-on pose $c_0 = a$;
-pour tout $n \geq 0$ et c_n déjà défini, on note P_n l'unique polynôme de degré 1 tel que $P_n(c_n) = f(c_n)$, $P_n(b) = f(b)$; on définit c_{n+1} par $P_n(c_{n+1}) = 0$.

1. Trouver explicitement la fonction φ telle que $c_{n+1} = \varphi(c_n)$.
2. Montrer que la suite $\{c_n\}_{n\geq 0}$ est strictement croissante et contenue dans l'intervalle $[a, c]$.
3. Montrer que la suite $\{c_n\}_{n\geq 0}$ converge vers c, et que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$|c_n - c| \leq \frac{|f(c_n)|}{m_1}.$$

Application numérique : Représenter graphiquement la fonction $f(x) = x^3 - 4x + 1$ et donner l'approximation numérique c_3 de la solution réelle de $f(x) = 0$ comprise entre 1.5 et 2. Donner un majorant de l'erreur commise en utilisant ce qui précède.