AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I

1. En appliquant la formule de Taylor avec reste Lagrange on trouve

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{3! \cdot 8}(1+\theta x)^{-5/2}x^3,$$

pour un certain θ dans $]0,1[$. Ainsi, $P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ et, pour x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, nous avons

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{3|x|^3}{48(1/2)^{5/2}} = \frac{\sqrt{2}|x|^3}{4} \leq \frac{|x|^3}{2}.$$

2. Soit $N_x = [1/\sqrt{x}]$ appartenant à $\mathbb{N}$. En utilisant un développement de Taylor de f autour de 0, avec reste Lagrange, on obtient

$$f(kx) = f'(0)kx + \frac{1}{2}f''(\theta kx)k^2x^2, \text{ pour } \theta \in]0,1[.$$

En remplaçant dans la somme :

$$\begin{aligned} S(x) &:= \sum_{k=1}^{N_x} f(kx) = \sum_{k=1}^{N_x}(f'(0)kx + \frac{1}{2}f''(\theta kx)k^2x^2) \\ &= f'(0)x\frac{N_x(N_x+1)}{2} + \eta(x), \end{aligned}$$

où $\eta(x) = \frac{x^2}{2}\sum_{k=1}^{N_x} k^2 f''(\theta kx)$. Puisque f'' est bornée dans un voisinage de 0 et comme

$$\sum_{k=1}^{N_x} k^2 = N_x(N_x+1)(2N_x+1)/6,$$

nous avons $\eta(x) \to 0$ quand x décroit vers 0.

Par ailleurs, $xN_x(N_x+1)$ est compris entre $1-x$ et $1+x$ et tend vers 1, quand x décroit vers 0. Au final,

$$S(x) \to \frac{f'(0)}{2}, \text{ quand } x \to 0+.$$

3. En posant $y = a/\sqrt{x}$, nous avons le développement de Taylor de f en 0 : $f(y) = 1-y^2/2(1+\varepsilon(y))$, où $\varepsilon(y) \to 0$ quand $y \to 0$. De plus, $\ln(1 - y^2/2(1 + \varepsilon(y))) = -y^2/2(1 + \varepsilon'(y))$ avec $\varepsilon'(y) \to 0$ quand $y \to 0$. Nous en déduisons,

$$\begin{aligned}
\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x &= \exp\left(x \ln f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)\\
&= \exp\left(x \ln(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x}(1+\varepsilon(\frac{a}{\sqrt{x}}))\right)\\
&= \exp(-\frac{a^2}{2}(1+\varepsilon'(\frac{1}{\sqrt{x}})).
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = \exp(-\frac{a^2}{2}).$$

Exercice II

1. On peut diagonaliser A et on obtient $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -2\\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et mettons $C = P^{-1} \cdot B \cdot P$. Alors, l'équation de départ $B^2 = A$ est équivalente à $C^2 = D$. De plus, $tr(C) = tr(B) = 0$. Ces équations donnent

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0\\ c & -a & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + bc = 1$. Pour finir, il faut transformer via $B = P \cdot C \cdot P^{-1}$, ce qui donne

$$\left\{\begin{pmatrix} 4a-3b+c & 9a-9b+2c & 5a-6b+c\\ -a+b & -2a+3b & -a+2b\\ -a-c & -3a-2c & -2a-c \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R}^3,\ a^2+bc=1\right\}.$$

Exercice III

1. Si $b = c = 0$ la matrice est diagonale.

Si $b = 0$ et $c \neq 0$, la matrice est triangulaire inférieure, donc elle admet a comme valeur propre de multiplicité 3. L'espace propre associé à a est $\{(0, 0, X)^\top,\ X \in \mathbb{C}\}$.

De manière similaire, si $b \neq 0$ et $c = 0$, a est valeur propre de multiplicité 3 et l'espace propre associé est $\{(X, 0, 0)^\top,\ X \in \mathbb{C}\}$.

Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on obtient, soit par calcul de déterminants, soit par les équations de la question suivante, que les valeurs propres sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_{2,3} = a \pm \sqrt{2bc}$. Les sous-espaces propres sont de rang 1, associés aux vecteurs propres $v_1 = (b, 0, -c)^\top$, $v_2 = (b, \sqrt{2bc}, c)^\top$ et $v_3 = (b, -\sqrt{2bc}, c)^\top$, respectivement.

2. Soit X un vecteur de taille n à éléments complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$. L'équation $AX = \lambda X$ donne les équations

$$\begin{aligned}
aX_1 + bX_2 &= \lambda X_1 \\
cX_1 + aX_2 + bX_3 &= \lambda X_2 \\
&\cdots \\
cX_{n-1} + aX_n &= \lambda X_n
\end{aligned}$$

qui peuvent s'écrire aussi sous forme récurrente

$$bX_{k+1} + (a - \lambda)X_k + cX_{k-1} = 0,$$

en posant $X_0 = X_{n+1} = 0$. Nous allons résoudre l'équation caractéristique $br^2 + (a - \lambda)r + c = 0$ de cette suite récurrente. Le déterminant de cette équation est $\Delta = (a - \lambda)^2 - 4bc$. Si ce déterminant s'annule l'équation admet une solution double $r_0 = \frac{\lambda - a}{2b}$ qui est différente de 0 (car $c \neq 0$). Il existe donc des nombres complexes α et β tels que

$$X_k = \alpha r_0^k + \beta k r_0^{k-1}.$$

Comme $X_0 = X_{n+1} = 0$, on en déduit $\alpha = \beta = 0$, donc $X = 0$. Ceci est exclu, donc le déterminant Δ ne peut s'annuler.

Nous avons donc $\Delta \neq 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, ce qui donne $X_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k$. En tenant compte de $X_0 = X_{n+1} = 0$, on trouve $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$. Il existe donc p entre 1 et n tel que $r_2 = r_1 \exp(\frac{2ip\pi}{n+1})$. Ceci donne, pour p de 1 à n,

$$r_1 = \sqrt{\frac{c}{b}} \exp\left(-\frac{ip\pi}{n+1}\right), \, r_2 = \sqrt{\frac{c}{b}} \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right) \text{ et } \lambda = a + \sqrt{2bc} \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right).$$

Comme nous avons ici n valeurs propres 2 à 2 distinctes, la matrice est diagonalisable. Le vecteur propre associé à λ est

$$v = \left((\frac{c}{b})^{1/2} \sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right), ..., (\frac{c}{b})^{n/2} \sin\left(\frac{np\pi}{n+1}\right) \right)^\top.$$

En effet, les vecteurs trouvés à la première question sont proportionnels à v, pour $n = 3$.

Exercice IV

1. Nous avons
$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{10+x}\,dx = \ln\left(\frac{11}{10}\right).$$
De plus,
$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x}{10+x}\cdot x^n\,dx = \int_0^1 x^n dx - 10\int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx = \frac{1}{n+1} - 10\cdot I_n.$$

2. Nous avons $\epsilon_n = 10\epsilon_{n-1}$. Donc $\epsilon_{10} = \epsilon_0 \cdot 10^{10} = 5\cdot 10^5$. Par contre, $\epsilon_{10} = \epsilon_{20}\cdot 10^{-10}$. Il est donc préférable de calculer d'abord une approximation numérique de I_{20} car l'erreur numérique ne se propage pas quand n décroit, alors qu'elle augmente de manière exponentielle quand n croit.

3. Nous avons
$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{10+x}\,dx,$$
donc cette quantité est positive et, de plus,
$$I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10}\left(\int_0^1 x^n\,dx - \int_0^1 x^{n+1}\,dx\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{10(n+1)(n+2)}.$$
En utilisant la relation de récurrence donnée précédemment, nous en déduisons que
$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{10(n+1)} - \frac{1}{10}\cdot I_{n+1} - I_{n+1} \geq 0,$$
ce qui implique que
$$I_n \geq I_{n+1} \geq \frac{1}{11(n+1)}.$$
Par ailleurs,
$$I_n \leq I_{n+1} + \frac{1}{10(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - 10\cdot I_n + \frac{1}{10(n+1)(n+2)},$$
ce qui donne l'autre inégalité
$$I_n \leq \frac{1}{11(n+1)} + \frac{1}{110(n+1)(n+2)}.$$