ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice I

1. Soit $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Trouver un polynôme $P_2(x)$ qui approxime $f(x)$ pour x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et démontrer que l'erreur d'approximation $f(x) - P_2(x)$ vérifie

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{2}, \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

2. Soit f une fonction réelle deux fois continûment dérivable sur $]-1, 1[$, telle que $f(0) = 0$. Déterminer

$$\lim_{x \to 0+} \sum_{k=1}^{[\frac{1}{\sqrt{x}}]} f(kx),$$

où $[z]$ désigne la partie entière d'un nombre réel z.

3. Prouver que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois continûment dérivable, telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$, on a alors, pour tout a nombre réel,

$$\lim_{x \to \infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right)^x = \exp\left(-\frac{a^2}{2} \right).$$

Exercice II

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble de matrices carrés de dimension 3 à éléments réels et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable et, si oui, donner la matrice diagonale ainsi que la matrice de passage.
2. Trouver toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$B^2 = A \quad \text{et} \quad tr(B) = 0,$$

   où tr désigne la trace.

Exercice III

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, a, b, $c \in \mathbb{C}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{pmatrix}$$

appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que $n = 3$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A, en discutant selon les valeurs de a, b et c.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ quelconque, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A, en résolvant l'équation $AX = \lambda X$, pour un vecteur X de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice IV

Soit
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0 et donner une relation de récurrence pour calculer I_{n+1} avec $n \in \mathbb{N}$.
2. Notons par $\hat{I}_0$ l'approximation numérique de I_0 et supposons que $\hat{I}_n$ est calculé à partir de $\hat{I}_0$ par la même relation de récurrence que I_n à partir de I_0. Soit $\epsilon_n = |I_n - \hat{I}_n|$ l'erreur d'approximation, pour tout n entier positif.

   Trouver une relation de récurrence pour la suite ϵ_n. De combien serait l'erreur ϵ_{10} si l'erreur initiale est $\epsilon_0 = 5 \cdot 10^{-5}$? Comment s'exprime ϵ_{10} en fonction de ϵ_{20} ? Que suggérez-vous ?
3. Montrer que
$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10(n+1)(n+2)},$$
   et, en déduire que
$$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{11(n+1)} + \frac{1}{110(n+1)(n+2)}.$$
   De quel ordre est ϵ_n et l'erreur relative ϵ_n / I_n ?