

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

 Fomesoutra.com
ça s'écrit !

EXERCICE n° 1

① $\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)^3 - \frac{1}{2}(1 - \lambda) = (1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - \frac{1}{2})$. Les valeurs propres de la matrice sont : $1, 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ces trois valeurs étant strictement positives, la matrice est définie positive.

② Soit $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice de la projection orthogonale sur F au

sens du produit scalaire défini par M est égale à : $X(X'MX)^{-1}X'M$, où M' désigne la transposée de M .

Calculons $P_F(u)$ pour $u \in \mathbf{R}^3$,

$$X'M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X'MX = I_2, \text{ d'où } X(X'MX)^{-1}X'M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $u = (x, y, z)$, on a $P_F(u) = (0, \frac{1}{2}x + y, \frac{1}{2}x + z)$

EXERCICE n° 2

① La décomposition de ϕ en carrés selon la méthode de Gauss donne :

$$\phi(x) = 2x_1x_2 + x_1(3x_3 + 4x_4) + 5x_2x_3$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(2x_2 + 3x_3 + 4x_4)(2x_1 + 5x_3) - \frac{5}{2}x_3(3x_3 + 4x_4)$$

On détermine alors deux formes linéaires l_1 et l_2 sur E par :

$$l_1 + l_2 = 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \text{ et } l_1 - l_2 = 2x_1 + 5x_3$$

On obtient,



$$l_1 = x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \text{ et } l_2 = -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$$

De même, on détermine deux formes linéaires l_3 et l_4 sur E par :

$$l_3 + l_4 = 3x_3 + 4x_4 \text{ et } l_3 - l_4 = x_3, \text{ d'où}$$

$$l_3 = 2(x_3 + x_4) \text{ et } l_4 = x_3 + 2x_4$$

On obtient ainsi,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(l_1^2 - l_2^2) - \frac{5}{2}(l_3^2 - l_4^2)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4)^2 - 10(x_3 + x_4)^2 + \frac{5}{2}(x_3 + 2x_4)^2$$

La signature de ϕ est donc $(2, 2, n-4)$. Si $n = 4$, ϕ est non dégénérée.

❷ Pour obtenir une base ϕ -orthogonale de E , il suffit de transformer la base initiale de E par la matrice P définie par son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans cette base ϕ s'écrit : $\phi(x) = \frac{1}{2}X_1^2 - \frac{1}{2}X_2^2 - 10X_3^2 + \frac{5}{2}X_4^2$

EXERCICE n° 3

❶ Les vecteurs de F sont invariants par S_F et P_F . On a $E = F \oplus F^\perp$, donc pour tout $x \in E$, $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$. Géométriquement on obtient $S_F(x) = x - 2(x - P_F(x))$ ou encore $S_F = 2P_F - I$.

❷ Pour $F = \text{Vect}(a)$ et pour $x \in E$, on a :

$$P_F(x) = \frac{(x, a)}{\|a\|^2} a \text{ et } S_F(x) = 2 \frac{(x, a)}{\|a\|^2} a - x$$

En effet, $e = \frac{a}{\|a\|}$ est une base orthonormée de F , donc $P_F(x) = \lambda e$ avec

$$\lambda(x, e) = (x, \frac{a}{\|a\|}) = \frac{1}{\|a\|} (x, a)$$

Pour $F = a^\perp$, comme $E = \text{Vect}(a) \oplus a^\perp$, on a $P_E = I = P_{\text{Vect}(a)} + P_{a^\perp}$. On en déduit :

$$S_F = 2P_F - I = 2(I - P_a) - I = I - P_a \text{ et}$$

$$S_F(x) = x - 2 \frac{(x, a)}{\|a\|^2} a$$



$$\textcircled{3} \text{ Pour } F = \text{Vect}(a), P_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & 0 & . \\ . & 0 & -1 & 0 \\ 0 & . & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } F = a^\perp, P_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & 1 & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . \\ . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE n° 4

$$\textcircled{1} \text{ On a } D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & . & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & . \\ 0 & 1 & a+b & ab & 0 \\ . & 0 & . & . & ab \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\textcircled{2} \text{ On vérifie que } D_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

PROBLEME

$$\textcircled{1} X'X = \begin{pmatrix} X'_1 \\ . \\ X'_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & . & X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & . & \langle x_i, x_j \rangle \\ . & . & . \\ \langle x_i, x_j \rangle & . & \|x_p\|^2 \end{pmatrix} = G(x_1, \dots, x_p),$$

$X'X$ est appelée matrice de Gram.

② On choisit x_{p+1} orthogonal à tous les vecteurs $\{x_1, \dots, x_p\}$ et unitaire, puis x_{p+2} orthogonal à tous les vecteurs $\{x_1, \dots, x_p, x_{p+1}\}$ et unitaire. Ainsi, on obtient par la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned}\langle x_i, x_j \rangle &= 0, \forall 1 \leq i \leq p, \forall p+1 \leq j \leq n \\ \langle x_j, x_j \rangle &= 1, \forall p+1 \leq j \leq n \\ \langle x_i, x_j \rangle &= 0, \forall p+1 \leq i, j \leq n, i \neq j\end{aligned}$$

Ceci correspond à l'égalité demandée.

$$\text{D'autre part, } (\det \hat{X})^2 = \det \hat{X}' \hat{X} = \det X' X \text{ et}$$

$$\det G(x_1, \dots, x_p) = \det X' X = \det X' X \cdot \det I_{n-p} = \det G(x_1, \dots, x_n), \text{ d'où l'égalité.}$$

Il est clair qu'alors $\det G(x_1, \dots, x_p) > 0$.

On peut compléter les deux familles libres de vecteurs $\{x_1, \dots, x_p\}$ et $\left\{x_1, \dots, x_{p-1}, x_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i\right\}$, qui engendrent le même sous-espace vectoriel, par les mêmes vecteurs $\{x_{p+1}, \dots, x_n\}$ et obtenir ainsi,

$$(\det \hat{X})^2 = \det G(x_1, \dots, x_p) \text{ et } (\det \hat{X})^2 = \det G(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i)$$

D'où le résultat demandé :

$$\det G(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p) = \det G(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i)$$

③ On a $P_F(y) = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j$. Si $y \notin F$, les vecteurs $\{x_1, \dots, x_p, y\}$ sont indépendants et on applique le résultat précédent à l'ordre $p+1$ (dans ce cas le vecteur $y - P_F(y)$ est orthogonal à F). Si $y \in F$, $y - P_F(y) = 0$ et $y = P_F(y) = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j$, dans ce cas les deux déterminants sont nuls.

$$G(x_1, \dots, x_p, y - P_F(y)) = \begin{pmatrix} X' X & 0 \\ 0 & \|y - P_F(y)\|^2 \end{pmatrix}$$

On a les trois égalités suivantes :

$$\det G(x_1, \dots, x_p, y - P_F(y)) = \det G(x_1, \dots, x_p, y)$$

$$\det G(x_1, \dots, x_p, y - P_F(y)) = \det G(x_1, \dots, x_p, y) \times \|y - P_F(y)\|^2$$

$$(d(y, F))^2 = \|y - P_F(y)\|^2$$

On en déduit,

$$(d(y, F))^2 = \frac{\det G(x_1, \dots, x_p, y)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$$

$$\textcircled{4} \quad G(x_1, \dots, x_p, y) = \begin{pmatrix} X'X & X'y \\ y'X & \|y\|^2 \end{pmatrix}.$$



D'où $\det G(x_1, \dots, x_p, y) = \det X'X \times \det (\|y\|^2 - y'X(X'X)^{-1}X'y)$

ou encore,

$$\det G(x_1, \dots, x_p, y) = (\|y\|^2 - y'X(X'X)^{-1}X'y) \times \det G(x_1, \dots, x_p)$$

D'autre part, $(d(y, F))^2 = \|y - P_F(y)\|^2 = \|y - X(X'X)^{-1}X'y\|^2$

En développant cette dernière expression, on obtient :

$$\|y\|^2 - y'X(X'X)^{-1}X'y = (d(y, F))^2 \text{ et donc,}$$

$$(d(y, F))^2 = \frac{\det G(x_1, \dots, x_p, y)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$$