

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN



AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❶ Montrer que M est définie positive.

❷ Soit $F = \text{Vect}\{e_2, e_3\}$ le sous-espace vectoriel engendré par $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On note P_F la projection orthogonale sur F au sens du produit scalaire défini par M . Déterminer $P_F(u)$ pour $u \in \mathbf{R}^3$

EXERCICE n° 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n , où $n \geq 4$.

❶ Déterminer la signature de la forme quadratique ϕ définie sur une base de E par :

$$\phi(x) = 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 5x_2x_3 + 4x_1x_4$$

❷ Ecrire $\phi(x)$ dans une base ϕ -orthogonale de E .

EXERCICE n° 3

Soient E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . on note S_F la symétrie orthogonale par rapport à F et P_F le projecteur orthogonal sur F



❶ Exprimer S_F en fonction de P_F

❷ En déduire $S_F(x)$, pour $x \in E$, lorsque $F = \text{Vect}(a)$ et lorsque $F = a^\perp$. ($\text{Vect}(a)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur a , non nul, de E et $a^\perp$ le sous-espace orthogonal à a). $S_F(x)$ sera exprimé en fonction de x , a et (x, a) .

❸ Donner les matrices de S_F et P_F dans une base orthonormée de E , pour $F = \text{Vect}(a)$ et $F = a^\perp$.

EXERCICE n° 4

On considère D_n le déterminant d'ordre n de terme général $d_{i,j}$ défini par :

$d_{i,i} = a + b, d_{i,i+1} = ab, d_{i+1,i} = 1$ et sinon $d_{i,j} = 0$, où a et b sont des réels.

❶ Etablir une relation de récurrence entre D_n , D_{n-1} et D_{n-2} , pour $n \geq 3$

❷ Calculer D_n .

PROBLEME

Soit $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$

Pour toute famille de vecteurs $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$ de $\mathbf{R}^n$, on note :

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} e_i \quad X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \quad X = (X_1, \dots, X_p) = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

On désigne par $G(x_1, \dots, x_p)$ la matrice carrée d'ordre p dont le terme général est $\langle x_i, x_j \rangle$ et on suppose que $p < n$.

❶ Vérifier que $G(x_1, \dots, x_p) = X'X$, où X' désigne la transposée de X

❷ Soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ une famille libre, montrer qu'il existe $\{x_{p+1}, \dots, x_n\}$ tels

$$\text{que : } G(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} G(x_1, \dots, x_p) & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'X & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On note $\hat{X} = (X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n)$ la matrice carrée d'ordre n . Montrer que $(\det \hat{X})^2 = \det G(x_1, \dots, x_p)$ et en déduire que $\det G(x_1, \dots, x_p) > 0$.

Montrer que pour toute famille libre $\{x_1, \dots, x_p\}$, on a :



$$\det G(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p) = \det G(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i)$$

❸ Soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ une famille libre et $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ le sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Pour tout y de $\mathbf{R}^n$, on note $P_F(y)$ la projection orthogonale de y sur F .

Montrer que $\det G(x_1, \dots, x_p, y - P_F(y)) = \det G(x_1, \dots, x_p, y)$

Déterminer $\det G(x_1, \dots, x_p, y - P_F(y))$ en fonction de $\det G(x_1, \dots, x_p)$ et de $\|y - P_F(y)\|$

$$\text{En déduire que : } (d(y, F))^2 = \frac{\det G(x_1, \dots, x_p, y)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$$

$$\text{❹ Pour } y = \sum_{i=1}^n y_i e_i, \text{ on note } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } Z = (X_1, \dots, X_p, Y)$$

On a donc $G(x_1, \dots, x_p, y) = Z'Z$. Retrouver le résultat précédent en utilisant le calcul matriciel par blocs et les propriétés de la matrice de projection orthogonale sur F .

Rappel : Si A est une matrice carrée inversible et si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est une matrice carrée, alors $\det M = \det A \times \det(D - CA^{-1}B)$.