CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ On vérifie aisément que $A'A = I$.

❷ La matrice A est donc inversible et $A' = A^{-1}$. Cette égalité montre que A est une matrice orthogonale et ses valeurs propres sont de module égal à 1. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3, les valeurs propres sont $1, e^{i\alpha} et\ e^{-i\alpha}$.

D'autre part, l'opérateur Trace est invariant par changement de base, donc : $-\frac{1}{3} = 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 1 + 2\cos\alpha$, d'où $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, puis $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Les deux autres valeurs propres sont $\frac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$

EXERCICE n° 2

❶ On vérifie que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I - M$.

❷ On a $M^2 + M - 2I = 0$ et $P(x) = x^2 + x - 2$ répond à la question.

❸ M étant symétrique, elle est diagonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour λ valeur propre de M, on a : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, d'où $\lambda = 1$ ou -2. La trace étant invariante par changement de base, on a aussi : $1 - 2 + \lambda = Tr(M) = -3$, d'où $\lambda = -2$. En conclusion, $\lambda = 1$ est une valeur propre simple et $\lambda = -2$ une valeur propre double.

❹ Le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est nécessairement un polynôme du premier degré, c'est-à-dire :

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + (aX + b)$$

Pour $X=1$, on obtient $1=a+b$ et pour $X=-2$, $(-2)^n=-2a+b$. La résolution du système donne :

$$a=\frac{1-(-2)^n}{3} \text{ et } b=\frac{2+(-2)^n}{3}$$

❺ $M^n=(M^2+M-2I)Q(M)+(aM+bI)$ et comme $M^2+M-2I=0$, on obtient $M^n=aM+bI$ ou encore,

$$M^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

❻ On obtient $U_{n+1}=M^n U_1=\begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+a\\b+a\\b+a\end{pmatrix}$, d'où

$x_{n+1}=y_{n+1}=z_{n+1}=1$

EXERCICE n° 3

❶ On vérifie aisément que l'on a une norme, en effet,

(1) $\|f\|=0 \Leftrightarrow \sup_{x\neq 0}\|f(x)\|=0 \Leftrightarrow f(x)=0, \forall x\neq 0 \Leftrightarrow f(x)=0, \forall x$ (car $f(0)=0$).
(2) $\forall \lambda \in R, \|\lambda f\|=|\lambda|\times\|f\|$
(3) $\forall f,g\in L(E)$, $\|(f+g)(x)\|\leq\|f(x)\|+\|g(x)\|, \ \forall x\in E$, d'où $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$

❷ Si $I-(P-Q)$ n'est pas inversible, alors $\exists u\neq 0, (I-(P-Q))(u)=0$, d'où $u=(P-Q)(u)$ et $\|u\|=\|(P-Q)u\|\leq\|P-Q\|\times\|u\|<\|u\|$, ce qui est impossible.

Comme $I-(P-Q)$ est inversible, il existe un endomorphisme v de E tel que :
$(I-(P-Q))v=I$, d'où $P(I-(P-Q))v=P$ ou encore $(P-P^2+PQ)v=P$ et $PQv=P$ car $P^2=P$. Pour tout x de E, on a $P(x)=PQ(v(x))$.

Soit $y\in \mathrm{Im}(P)$, alors $y=P(x)=PQ(v(x))$ et $t=Q(v(x))\in \mathrm{Im}\,Q$ vérifie $y=P(t)$, donc P est surjective.

Soit $y \in \mathrm{Im}(Q)$ tel que $P(y)=0$ et $Q(y)=y$, alors $(I-P-Q)y=0$, d'où $y=0$.

P est donc une application bijective de $\mathrm{Im}(Q)$ sur $\mathrm{Im}(P)$

P étant un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Im}(Q)$, les dimensions sont égales.

EXERCICE n° 4

❶ Soient $x_1=(x_{11},x_{21},x_{31})$, $x_2=(x_{12},x_{22},x_{32})$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$. Pour $z=(1,0,0)$, on obtient $y_1=x_{21}x_{32}-x_{22}x_{31}$ puis pour $z=(0,1,0)$, $y_2=x_{31}x_{12}-x_{32}x_{11}$. Enfin avec $z=(0,0,1)$, on a $y_3=x_{11}x_{22}-x_{21}x_{12}$.

❷ On vérifie que les composantes des deux vecteurs de l'égalité du double produit vectoriel sont identiques. Si $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $w=(w_1,w_2,w_3)$, la première composante est $x_2w_1w_2+x_3w_1w_2+x_1(w_1^2-1)$, sachant que le vecteur w est unitaire. Il en est de même pour les deux autres composantes.

On a $u^2(x)=(x\wedge w)\wedge w=(w.x)w-x$ et $u^3(x)=-u(x)$ car $w\wedge w=0$.

Soit x un vecteur propre non nul, associé à la valeur propre réelle λ, on a :

$$u^3(x)=\lambda^3x=-\lambda x \text{ et } \lambda^3+\lambda=0, \text{ d'où } \lambda=0.$$

Le sous espace propre associé est défini par : $x\wedge w=0$, ce qui correspond à la droite vectorielle engendrée par w.

❸ On a $\varphi_\alpha=id+\alpha u$. Si φ_α n'était pas inversible, il existerait $\alpha\neq 0$ tel que

$$\det(id+\alpha u)=0=\alpha^3\det(u+\frac{1}{\alpha}id)$$

donc $-\frac{1}{\alpha}$ serait un vecteur propre de u.

Dans $u^3+u=0$, on remplace u en fonction de φ_α, à savoir

- si $\alpha\neq 0$, on trouve $\varphi_\alpha^3-3\varphi_\alpha^2+(3+\alpha^2)\varphi_\alpha-(1+\alpha^2)id=0$, et
- si $\alpha=0$, $(\varphi_\alpha-id)^3=0$

On peut choisir,

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + (3+\alpha^2)x - (1+\alpha^2).$$

❹ On a $\varphi_\alpha \circ (\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id) = (1+\alpha^2)id$, d'où

$$(\varphi_\alpha)^{-1} = \frac{1}{1+\alpha^2}(\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id) = id - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}u + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}u^2$$

EXERCICE n° 5

Une matrice A commute avec toutes les matrices si et seulement si elle commute avec toutes les matrices E_{ij} de la base canonique.

On vérifie que

$$\forall(\alpha,\beta) \in [1,n]\times[1,n], \text{ on a } A_{\alpha i}\delta_\beta^j = A_{j\beta}\delta_\alpha^i$$

Pour $\beta = j$, il vient $A_{\alpha i} = A_{jj}\delta_\alpha^i$.

Donc, si $\alpha \neq i$, $A_{\alpha i} = 0$ et si $\alpha = i$: $A_{ii} = A_{jj}$

Les termes diagonaux sont égaux et les termes non diagonaux sont nuls. A est nécessairement une matrice scalaire. La réciproque est évidente.

PROBLEME

❶ Supposons que f soit la composée d'une projection p et d'une homothétie h, on a $p \circ p = p$ et $h = \lambda Id$. On obtient $f(x) = p \circ h(x) = \lambda p(x)$ donc $f \in L_\lambda$.

On pose $p(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$ et $h(x) = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$. On vérifie que $p \circ p = p$.

❷ Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap Ker\ f$. On obtient : $f(y)=0$ et $\exists x \in E \,/\, y = f(x)$, d'où $f(y) = f^2(x) = 0 = \lambda f(x)$ et $y = f(x) = 0$

❸ Soit $f, g \in L_\lambda$. $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $(f+g) \circ (f+g) = \lambda(f+g)$ ou encore $f \circ g + g \circ f = 0$.

Si $f \circ g = g \circ f$, il est clair que $(f+g) \in L_\lambda$.

Réciproquement, on a

$$f \circ g + g \circ f = 0 \quad (1)$$

On multiplie (1) par f à droite, puis à gauche,

$$\begin{cases} \lambda(g \circ f) + f \circ g \circ f = 0 \\ f \circ g \circ f + \lambda(f \circ g) = 0 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $f \circ g - g \circ f = 0$ (2);

La résolution du système (1) et (2) donne le résultat demandé.

❹

$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ (g \circ f) \circ f = (g \circ g) \circ (f \circ f) = \lambda_1 \lambda_2 (g \circ f),$$

donc $\mu = \lambda_1 \lambda_2$.

❺ $v \circ v \in L_\lambda \Leftrightarrow (u - aI) \circ (u - aI) = \lambda v \Leftrightarrow u^2 - 2au + a^2 I = \lambda(u - aI)$

Par hypothèse, $u^2 - (a+b)u + abI = 0$, d'où $u^2 = (a+b)u - abI$. On trouve donc $\lambda = b - a$.

De même $w \circ w \in L_\mu$ avec $\mu = a - b$.

Par ailleurs, $u = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow u = \alpha(u - aI) + \beta(u - bI)$. Ceci est vérifié pour $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha a + \beta b = 0$, ce qui donne

$$\alpha = \frac{b}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{-a}{b-a}$$

On a $u^n = \alpha^n v^n + \beta^n w^n$ car $v \circ w = w \circ v = 0$.

D'autre part $v^n = \lambda^{n-1} v$ et $w^n = \mu^{n-1} w$. On obtient :

$$u^n = \frac{b^n}{b-a} v - \frac{a^n}{b-a} w$$

❻ Le polynôme caractéristique de A est

$(\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$, d'où d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$(A+I)\left(A^2-A-2I\right)=(A+I)^2(A-2I)=0$$

Si un tel polynôme existe c'est forcément $(A+I)(A-2I)$, on calcule cette expression et on trouve $(A+I)(A-2I)=0$

On obtient, par exemple, $a=-1$ et $b=2$.

$$A^n=\frac{2^n}{3}(A+I)-\frac{(-1)^n}{3}(A-2I)=\frac{(2^n+(-1)^n)}{3}A+\frac{(2^n+2(-1)^n)}{3}I$$