

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN



AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

$$\text{Soit } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- ❶ Calculer $A' A$.
- ❷ En déduire, sans calculer le polynôme caractéristique de A , les valeurs propres de la matrice A .

EXERCICE n° 2

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- ❶ Calculer M^2 .
- ❷ Trouver un polynôme P du second degré tel que $P(M) = 0$.
- ❸ La matrice M est-elle diagonalisable?. Si oui, déterminer ses valeurs propres.
- ❹ Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$, où $n \in \mathbb{N}^*, n > 2$.
- ❺ En déduire M^n .

⑥ Soit, pour $n > 0$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Résoudre le système $U_{n+1} = MU_n$ de condition initiale $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE n° 3

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n ($n \geq 1$). On note $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E . Pour $f \in L(E)$, on pose :

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

① Vérifier que la notation précédente permet de définir une norme sur E .

② Soient P et Q deux projections définies sur E et telles que $\|P - Q\| < 1$.

Montre que $I - (P - Q)$ est inversible.

Montrer que l'application P est une bijection de $\text{Im}(Q)$ sur $\text{Im}(P)$ (Im désigne l'image).

En déduire que $\dim \text{Im}(P) = \dim \text{Im}(Q)$.

EXERCICE n° 4

On rappelle qu'étant donné deux vecteurs x_1 et x_2 de l'espace vectoriel euclidien orienté R^3 , il existe un unique vecteur y de R^3 vérifiant :

$$\det(x_1, x_2, z) = y \cdot z, \quad \forall z \in R^3$$

Ce vecteur y s'appelle le produit vectoriel de x_1 et x_2 , et on note $y = x_1 \wedge x_2$ (dans la relation précédente $y \cdot z$ désigne le produit scalaire et $\det$ le déterminant).

① Calculer dans une base orthonormée de R^3 , les composantes de $x_1 \wedge x_2$ en fonction de celles de x_1 et x_2 .

② On considère un vecteur unitaire w et l'endomorphisme u de R^3 défini par : $u(x) = x \wedge w$.

Vérifier que $(x \wedge w) \wedge w = (w \cdot x)w - x$

Montrer qu'il existe un réel k tel que $u^3 = ku$

En déduire les valeurs propres réelles de u et les sous espaces propres associés.

③ Pour tout réel α , on note φ_α l'application définie sur R^3 par

$$\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x \wedge w)$$

Montrer que φ_α est un automorphisme de R^3 .

Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que $P(\varphi_\alpha) = 0$

④ En déduire qu'il existe $(a, b, c) \in R^3$ tel que $(\varphi_\alpha)^{-1} = a \text{Id} + bu + cu^2$ où Id désigne l'application identique. Calculer (a, b, c) en fonction de α .

EXERCICE n° 5

Déterminer l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec toutes les matrices de cet ensemble.

PROBLEME

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E vérifiant :

$$f \circ f = \lambda f, \text{ où } \lambda \text{ est un réel non nul.}$$

On note $L_\lambda = \{f \mid f \circ f = \lambda f\}$.

① Montrer que toute fonction de L_λ est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport λ .

② Montrer que pour toute fonction f de L_λ , le noyau de f et l'image de f sont deux sous espaces supplémentaires de E

③ Soit $f, g \in L_\lambda$. Montrer que $(f + g) \in L_\lambda$ si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0$

④ Soient $f \in L_{\lambda_1}$ et $g \in L_{\lambda_2}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \circ f \in L_\mu$, où μ dépend de λ_1 et λ_2 .

⑤ Soit u un endomorphisme de E n'appartenant pas à une famille de L_λ et vérifiant $(u - a \times \text{Id}) \circ (u - b \times \text{Id}) = 0$, où a et b sont deux réels distincts et Id désigne l'application identique.

Montrer que $v = u - a \times \text{Id}$ et $w = u - b \times \text{Id}$ appartiennent à des familles de L_λ .

Ecrire u sous la forme $u = \alpha v + \beta w$ et en déduire u^n .

⑥ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b

tels que $(A - aI)(A - bI) = 0$ où I est la matrice unité. En déduire A^n .