ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

Il est clair que 1 et 2 sont des valeurs propres de multiplicité 2 (la matrice est triangulaire). Si on note E_1 (respectivement E_2) le sous-espace vectoriel propre associé à 1 (resp. 2), A est diagonalisable si et seulement si $Dim\,E_1 = 2$ et $Dim\,E_2 = 2$.

$$u = (x, y, z, t) \in E_1 \Leftrightarrow Au = u \Leftrightarrow \begin{cases} ax = 0 \\ bx + cy + z = 0 \\ bx + cy + dz + t = 0 \end{cases}$$

et $Dim\,E_1 = 2$ si et seulement si *a=0.*
De même $Dim\,E_2 = 2$, si et seulement si *d=0*.
En conclusion la matrice est diagonalisable si et seulement si *a=d=0*.

EXERCICE n° 2

❶ $< f^2(x), y >=< f(f(x)), y >= - < f(x), f(y) >=< x, f^2(y) >$, et l'application f^2 est symétrique.

$< f(x), x >= - < x, f(x) >$, d'où $2 < f(x), x >= 0$ et $< f(x), x >= 0$
$< f^2(x), x >= - < f(x), f(x) >= -\|f(x)\|^2 \leq 0$

❷ Soit λ une valeur propre de f^2, il existe alors u, non nul, tel que $f^2(u)=\lambda u$. On a $< f^2(u),u >= \lambda\|u\|^2 \leq 0$, donc $\lambda \leq 0$.

❸ Soit (e_i) une base orthonormale, $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). Notons, $\forall i,\ f(e_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$. On a :

$< f(e_i), e_j >=< \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j, e_j >= a_{ij}$ et $< f(e_i), e_j >= -< e_i, f(e_j) >= -< e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i >= -a_{ji}$

En conclusion $a_{ij} = -a_{ji}$; la matrice est antisymétrique.

❹ Soit M la matrice associée à *f*, on a :

$$Q(u^2)=\det(M^2-u^2I)=\det(M-uI)\times\det(M+uI)=\det(M-uI)\times(-1)^n\det(-M-uI)$$

et comme *M* est antisymétrique,

$$Q(u^2)=\det(M-uI)\times(-1)^n\det(M^{'}-uI)=\det(M-uI)\times(-1)^n\det(M-uI)^{'}$$
$$Q(u^2)=(-1)^n\det(M-uI)\times\det(M-uI)=(-1)^n(P(u))^2$$

❺ Si λ est une racine de *P* dans *C* (existence assurée par le théorème de Cayley-Hamilton), λ^2 est une racine de *Q* (❹) et λ^2 est négative (❷), donc λ est un imaginaire pur.

EXERCICE n° 3

❶ La matrice Ω est orthogonale si les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux et unitaires, à savoir :

$$a^2+b^2+c^2=1 \text{ et } ab+bc+ca=0$$

et si :

$$\det\Omega = a^3+b^3+c^3-3abc=a+b+c=1$$

Les deux conditions $\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$ entraînent les conditions précédentes et sont suffisantes pour obtenir la propriété. Elles montrent que *a, b, c* doivent être solutions d'une équation de la forme : $t^3-t^2+k=0$ dont les racines doivent être toutes réelles. En examinant les extrema locaux de cette fonction t^3-t^2+k, à l'aide du tableau de variation, on obtient : $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$.

❷ Soit $k=\frac{4}{27}\sin^2\varphi$, où $0\leq\varphi\leq 2\pi$ et faisons dans l'équation le changement de variable $t=\frac{1}{3}+\lambda\cos\alpha$, on obtient :

$$\lambda^3\cos^3\alpha-\frac{\lambda}{3}\cos\alpha=\frac{2}{27}(1-2\sin^2\varphi)=\frac{2}{27}\cos 2\varphi$$

Rappelons que $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ et pour $\lambda=\frac{2}{3}$ l'équation devient,

$\frac{2}{27}(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)=\frac{2}{27}\cos 2\varphi$ ou $\cos 3\alpha=\cos 2\varphi$; On obtient alors : $\alpha=\pm(\frac{2}{3}\varphi+\frac{2n\pi}{3})$

A une permutation près, on a :

$$a=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi}{3},\quad b=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi+2\pi}{3},\quad c=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi-2\pi}{3}$$

L'axe de la rotation est le vecteur propre pour la valeur propre 1, en remarquant que $a+b+c=1$, on trouve comme vecteur directeur unitaire : $\delta=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

Si ω est l'angle de la rotation ($0\leq\omega\leq 2\pi$), la matrice est semblable à

$$\Delta=\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega & 0\\ \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

d'où $2\cos\omega+1=Tr\Delta=3a=1+2\cos\frac{2\varphi}{3}$ et en considérant en outre le transformé de $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, orthogonal à δ, par la rotation Δ, on obtient $\sin\omega=\sin\frac{2\varphi}{3}$, d'où $\omega=\frac{2\varphi}{3}$

En permutant *b* et *c*, on obtiendrait $\omega=-\frac{2\varphi}{3}$, l'axe étant le même. Dans une permutation circulaire, on obtiendrait $\omega=\frac{2\varphi+2\pi}{3}$

En conclusion trois rotations de même axe vérifient les conditions imposées.

EXERCICE n° 4

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

❶ On vérifie que $P(M) = M^2 + M - 2I$

❷ Le reste de la division euclidienne de X^n par *P(X)* est un polynôme de degré 1.

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + aX + b$$

Pour *X=1*, on obtient *a+b=1*

Pour *X=-2*, on a $(-2)^n = -2a + b$, d'où $a = \dfrac{1-(-2)^n}{3}$ et $b = \dfrac{2+(-2)^n}{3}$

❸ On a $M^n = (M^2 + M - 2I)Q(M) + aM + bI$ et $M^2 + M - 2I = 0$, donc $M^n = aM + bI$, à savoir : $M^n = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$

La résolution du système donne : $U_n = M^n U_0$ et plus précisément,

$$\begin{cases} x_n = b - a = 1/3\left[1 + (-1)^n 2^{n+1}\right] \\ y_n = 3a - b = 1/3\left[1 - (-1)^n 2^{n+2}\right] \\ z_n = b - a = 1/3\left[1 + (-1)^n 2^{n+1}\right] \end{cases}$$

EXERCICE n° 5

Fomesoutra.com ça soutra !

On calcule le $\det A_\lambda$ de la façon suivante : on ajoute la troisième colonne à la première, puis on soustrait la troisième ligne à la première, le terme λ^2 se met en facteur, puis on retranche la première colonne à la troisième pour obtenir :

$$\det A_\lambda = \lambda^2 \begin{vmatrix} 0 & 2+\lambda & -1 \\ 1+\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 1+\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

d'où $\det A_\lambda = -\lambda^2(\lambda-1)(2\lambda^2+2\lambda+1)$.

- Pour $\lambda = 0$, la matrice devient $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le noyau est de dimension 2 et *rgA*=1

Le noyau est engendré, par exemple, par les vecteurs (1,-1,0) et (0,0,1). L'image est une droite vectorielle engendrée par le vecteur (1,0,1).

- Pour $\lambda = 1$, $rgA_1 = 2$ et l'image est engendrée par les vecteurs (1,0,-1) et (3,1,0). Par conséquent, $\dim KerA_1 = 1$ et le noyau est engendré par le vecteur (-2,1,1).

- Pour $\lambda \neq 0{,}1$, on vérifie que les 3 colonnes sont indépendantes, donc $\dim \operatorname{Im} A_\lambda = 3$ et $\dim KerA_\lambda = 0$

PROBLEME

❶ On a $\dim KerA + \dim \operatorname{Im} A = 3$.

On vérifie que $KerA = \{0\}$, d'où $\dim \operatorname{Im} A = 3$ et la résolution du système donne : $\operatorname{Im} A = \{(X,Y,Z,T) / Y - X = T - Z\}$.

Comme les vecteurs y_1, y_2, y_3 sont linéairement indépendants, ils forment une base de $\operatorname{Im} A$.

❷ E_3 et $\operatorname{Im} A$ ont la même dimension, il est donc possible de construire un isomorphisme entre ces 2 espaces vectoriels.
Pour déterminer $\tilde{A}$ pour la base canonique de R^3, il suffit de calculer les images des vecteurs de cette base, exprimées dans la base de $\operatorname{Im} A$.

$\tilde{A}(1,0,0) = A(1,0,0) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$, puis on calcule les valeurs λ_i en résolvant le système : $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 + \lambda_3 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Finalement $\tilde{A}(1,0,0) = (-2,3,4)$.
De même pour les deux autres vecteurs, on obtient :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Comme $\tilde{A}$ est une bijection, il existe une matrice inverse $\tilde{A}^{-1}$. D'autre part, $E_4 = \operatorname{Im} A \oplus (\operatorname{Im} A)^{\perp}$, on peut donc définir A^+ de la façon suivante :

$$A^+ y = \begin{cases} \tilde{A}^{-1} y & si \quad y \in \operatorname{Im} A \\ 0 & si \quad y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp} \end{cases}$$

Par ailleurs A^+ est unique puisque la décomposition dans la somme directe est unique.

La matrice inverse de $\tilde{A}$ est :

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 5 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $y_4 = (1,-1,-1,1)$ un vecteur de $(\operatorname{Im} A)^{\perp}$. La matrice A^+ relative aux bases $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ de E_4 et à la base canonique de R^3 est :

$$A^+ = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'obtenir dans les deux bases canoniques, il suffit de la multiplier à droite par la matrice de passage suivante :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En conclusion, on obtient :

$$A^{+} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -38 & -2 & -14 & 22 \\ 13 & 3 & 3 & -7 \\ 5 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

❸ Notons X la matrice des vecteurs $\{y_1, y_2, y_3\}$, la matrice de projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$ s'écrit :

$P_A = X(X^{'}X)^{-1}X^{'}$, où $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient $(X^{'}X)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis

$$P_A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Le calcul des produits des matrices donne : $A^{+}A = I_3$ et $AA^{+} = P_A$.

❹ $f(x+h) - f(x) = < A(x+h) - b, A(x+h) - b >_4 - < Ax - b, Ax - b >_4$
En développant cette expression, on obtient :

$$f(x+h) - f(x) = 2 < Ax - b, Ah >_4 + \|Ah\|^2$$

et $\|Ah\|^2 = o(\|h\|)$

La fonction *f* est donc différentiable et $df(x) : h \mapsto 2 < Ax - b, Ah >_4$.

Par ailleurs $< Ax - b, Ah >_4 = (Ah)^{'}(Ax - b) = h^{'}(A^{'}(Ax - b)) = < A^{'}Ax - A^{'}b, h >_3$

On vérifie que $A^{'}$ est une application de E_4 dans E_3, dont le noyau est engendré par le vecteur y_4. $Ker\, A^{'}$ est donc orthogonal à $\operatorname{Im} A$, d'où $A^{'}$ est une bijection de $\operatorname{Im} A$ sur E_3 et $A^{'}A$ est une bijection de E_3 sur E_3, donc elle est inversible. Par conséquent, il existe un unique $\bar{x}$ tel que : $\bar{x} = (A^{'}A)^{-1}A^{'}b$.

La fonction *f* étant strictement convexe et différentiable, x réalise le minimum de *f* si et seulement si $df(x)(h)=0,\ \forall h$ ou encore $A^{'}Ax = A^{'}b$. Ce qui correspond au résultat précédent.

Le minimum est obtenu au point $\hat{b}$ qui est la projection orthogonale de b sur $\operatorname{Im} A$.