ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ On obtient $\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^3$. $\lambda=1$ est donc une valeur propre triple. Le sous espace vectoriel propre associé est une droite engendrée par le vecteur $e_1=(1,1,1)$.

❷ A est semblable à la matrice M telle que : $Ae_1=e_1$, $Ae_2=e_1+e_2$ et $Ae_3=e_3+e_2$. On trouve $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, d'où $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\Delta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a $J^3=0$. Enfin $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

❸ $A^n=PM^n P^{-1}$ et $M^n=(\Delta+J)^n=I+nJ+\dfrac{n(n-1)}{2}J^2$. à savoir $M^n=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$. En particulier $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$. L'expression de A^n s'en déduit par la relation précédente.

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(n-1)(n-2)}{2} & n(2-n) & \frac{n(n-1)}{2} \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1-n^2 & \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1}{2} & -n(2+n) & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix}.$$

❹ D'autre part, on obtient : $u_n = A^n u_0$ et $u_0 = A\ u_0$, d'où $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La suite est donc stationnaire.

EXERCICE n° 2

❶ On vérifie que $A^{'}\ A = I$ (matrice unité).

❷ La matrice A est donc une matrice orthogonale et ses valeurs propres sont de module égal à 1. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3 et le déterminant positif, les valeurs propres sont : 1, $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.
Par ailleurs la trace étant invariante par changement de base, on a : $TrA = \frac{-1}{3} = 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$, d'où $\alpha = Arc\cos(-\frac{2}{3})$

EXERCICE n° 3

❶ Le noyau de f est une droite vectorielle engendrée par le vecteur (2,1,3) et l'image correspond donc au plan.

❷ Il existe x tel que : $p(u) = x(2,1,3) \in Kerf$ et la distance entre u et $Kerf$ est minimale. On a : $d^2\ (u, Kerf) = (1-2x)^2 + (1-x)^2 + (1-3x)^2$.
Cette expression est convexe et le minimum est atteint pour $x = \frac{3}{7}$, d'où $p(u) = \frac{3}{7}(1,2,3)$

❸ La matrice R de la rotation r est, dans la base canonique : $R=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On obtient $r(u)=(-1,1,1)$

❹ Soit P la matrice associée à p, on a (le raisonnement est identique à celui de la deuxième question) : $P=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 2 & 1 & 3\\ 6 & 3 & 9\end{pmatrix}$

On obtient : $P\circ R(u)=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 1 & -2 & 3\\ 4 & -6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ et

$R\circ P(u)=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}-2 & -1 & -3\\ 4 & 2 & 6\\ 6 & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\ 4\\ 9\end{pmatrix}$

EXERCICE n° 4

❶ On vérifie aisément que f est linéaire et que $f(X^{2n})=-2nX^{2n-1}-2aX^{2n}\in E$, il en est de même pour tout $p,(p\leq n)$. f est donc un endomorphisme.

❷ Les valeurs propres sont de la forme $\lambda=-2a\pm 2k$, où $k=0,1,\ldots,n$.
La résolution de l'équation $f(P)=\lambda P$ permet de déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres précédentes, à savoir : $P(X)=(X-1)^{n+k}\,(X+1)^{n-k}$. où k varie de $-n$ à $+n$.

❸ f est diagonalisable car toutes les valeurs propres sont réelles et distinctes. De plus f est inversible car ses valeurs propres sont non nulles.

❹ Les vecteurs propres forment donc une base de E et tout polynôme de E s'écrit comme une combinaison linéaire de ces vecteurs.

EXERCICE n° 5

❶ Dans ce cas, la matice M est symétrique, donc elle est diagonalisable. D'autre part, $rg(M) = rg(AA^{'}) = rg(A) = p$, la matice M admet donc $n-p$ valeurs propres nulles et M est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec une matrice de passage P orthogonale de la forme $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

La matice M s'écrit : $M = (P_1 \Delta_1^{1/2})(\Delta_1^{1/2} P_1)$, où $\Delta_1^{1/2}$ est la matrice diagonale dont les valeurs de la diagonale correspondent aux racines carrées des valeurs de la diagonale de Δ. Si $B = P_1 \Delta_1^{1/2}$, on a : $AA' = BB'$, d'où $B^{-1} A = B' A'^{-1}$ et $B^{-1} A = Q$ est une matrice orthogonale . On en déduit $A = Q P_1 \Delta_1^{1/2}$.

❷ On vérifie que $AA^{'} + \sigma^2 I_n \geq \sigma^2 I_n$, donc la matice M est symétrique définie positive et elle est diagonalisable dans le groupe orthogonale (notons P_1 la matrice de passage). Elle est semblable à une matrice Δ diagonale et définie positive. De même, la matrice A s'écrit alors: $A = Q P_1 (\Delta + \sigma^2 I)^{1/2}$.

❸ On a : $M \geq D$. D étant définie positive, il en est de même pour M et cette matrice est inversible.
On obtient $M^{-1} = D^{-1}(I + D^{-1}AA^{'})^{-1}$ à partir de la résolution de l'équation : $y = Mx$. On vérifie que $MM^{-1} = I$ (On vérifie que $I + D^{-1} AA'$ est inversible).

EXERCICE 6

❶ On vérifie que $AB - BA$ est une matrice antisymétrique.
Notons $C = AB - BA$. C est diagonalisable dans l'ensemble des nombres complexes. Soit λ une valeur propre complexe et u un vecteur propre associé. On a :

$Cu = \lambda u$, d'où $\bar{u}^{'} C u = \lambda \bar{u}^{'} u = \lambda \|u\|^2$ et $\bar{u}^{'} C^{'} u = -\lambda \|u\|^2$ (i)

Par ailleurs, $(Cu)^{'} = (\lambda u)^{'} = u^{'} C^{'} = \lambda u^{'}$ et $\bar{u}^{'} C^{'} = \bar{\lambda} \bar{u}^{'}$. Il vient,en multipliant par u à droite : $\bar{u}^{'} C^{'} u = \bar{\lambda} \|u\|^2$ (ii).

D'après les résultats précédents (i) et (ii), on trouve $\bar{\lambda} = -\lambda$, les valeurs propres sont donc des imaginaires purs.

❷ Il existe une base orthonormée pour la forme hermitienne associée à A et orthogonale pour la forme hermitienne associée à B. Soit P la matrice de passage associée à cette base, alors
$A=\overline{P}'P$ et $B=\overline{P}'DP$, où D est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs (d_{ij}). Notons $d=Inf\,(d_{ii})$. On a :

$Tr\,AB = Tr\,(\overline{P}'P\overline{P}'DP) = Tr\,(P\overline{P}'P\overline{P}'D) \geq d\,Tr(A^2)$

Si $A=(a_{ij})$, comme A est symétrique, on obtient : $Tr(A^2)=\sum_{i,k} a_{ik}^2$. $Tr(A^2)>0$, car sinon on aurait $A=0$, donc $Tr(AB)>0$.

❸ Supposons que $I+M$ ne soit pas inversible, il existe alors un vecteur u non nul tel que : $(I+M)u=0$, d'où $M\,u=-u$. Par transposition, $u'\,M' = -u'$ puis $u'\,M'\,u = -\|u\|^2$. D'autre part, comme M est antisymétrique $M'\,u=u$ et $u'\,M'\,u = \|u\|^2$. On obtient alors $\|u\|^2 = -\|u\|^2$ et $u=0$. Ce qui conduit à une contradiction.

La matrice $A=(I-M)(I+M)^{-1}$ existe d'après la question précédente.
A est orthogonale si et seulement si $A'=A^{-1}$. Ce qui est équivalent à : $(I-M)^{-1}M = M\,(I-M)^{-1}$. Cette relation est obtenue à partir de la relation $(I-M)M = M\,(I-M)$ en la multipliant à gauche et à droite par $(I-M)^{-1}$. On montre de même que $I-M$ est inversible.