

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

❶ Déterminer les valeurs et vecteurs propres de cette matrice A

❷ Montrer que A est semblable à une matrice M de la forme $M = \Delta + J$, où Δ est une matrice diagonale et J vérifie $J^3 = 0$. On précisera la matrice de changement de base.

❸ Calculer A^n pour tout entier naturel n .

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !

❹ On considère la suite $u_n = (x_n, y_n, z_n)$ définie par $u_0 = (1, 1, 1)$ et $u_{n+1} = Au_n$.
Etudier la convergence de cette suite.

EXERCICE n° 2

Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

❶ Calculer le produit $A' A$, où A' désigne la transposée de A .

❷ En déduire les valeurs propres de A .

EXERCICE n° 3

Soit f une application de R^3 dans R^2 définie par :

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - 2y)$$

- ❶ Déterminer le noyau et l'image de f
- ❷ Déterminer la projection orthogonale p de $u = (1, 1, 1)$ sur le noyau de f
- ❸ Déterminer la transformée de u par la rotation vectorielle r d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe Oz
- ❹ Quelle est la transformée de u par la composée des deux applications précédentes, à savoir $p \circ r$ et $r \circ p$.



EXERCICE n° 4

Soit E l'espace vectoriel des polynômes, à coefficients réels, d'une variable réelle X et de degré inférieur ou égal à $2n$.

On note f l'application définie sur E par : $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2(nX + a)P$, où a est un réel non entier et P appartient à E .

- ❶ Vérifier que f est un endomorphisme de E
- ❷ Déterminer les valeurs et vecteurs propres f
- ❸ f est-elle diagonalisable ? f est-elle inversible ?
- ❹ En déduire que tout polynôme P de E s'écrit sous la forme

$$P(X) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k (X-1)^{n-k} (X+1)^{n+k}, \text{ où } \alpha_k \text{ est un réel.}$$

EXERCICE n° 5

Soit A une matrice d'ordre (n, p) à coefficients réels, de rang égal à p , où $p < n$. On note D une matrice diagonale d'ordre n et on pose: $M = AA' + D$.

❶ On suppose que D est la matrice nulle. Etudier la diagonalisation de M et montrer que $A = PD_1$ où P est une matrice orthogonale et D_1 une matrice diagonale.

❷ On suppose maintenant que $D = \sigma^2 I_n$. Etudier la diagonalisation de M et montrer que $A = P_1 D_2$ où P_1 est une matrice orthogonale et D_2 une matrice diagonale.

❸ On suppose maintenant que D est définie positive.
Montrer que M est inversible.
Exprimer M^{-1} en fonction de A, A', D et leurs inverses.

EXERCICE n° 6



Soient A et B deux matrices carrées symétriques réelles d'ordre n .

❶ Montrer que la matrice $AB - BA$ n'a que des valeurs propres imaginaires pures.

❷ On suppose de plus que A et B sont définies positives, montrer que $Tr(AB) > 0$, où Tr désigne la trace de la matrice.

❸ Soit M une matrice antisymétrique réelle.
Montrer que la matrice $I + M$ est inversible.
Montrer que $(I - M)(I + M)^{-1}$ est orthogonale.