ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

CORRIGE 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ Si $b=a+1$, $u_n=\dfrac{a}{a+n+1}$

Pour $b\leq a+1$, $\prod_0^n(b+k)\leq\prod_0^n(a+1+k)$, donc $u_n\geq\dfrac{a}{a+n+1}$. Or la série de terme général $\dfrac{a}{a+n+1}$ diverge puisque $\dfrac{a}{a+n+1}\approx\dfrac{a}{n}$, d'après le critère d'équivalence concernant des séries à terme général positif. Le critère de comparaison sur les séries à termes positifs prouve que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ diverge.

❷ La démonstration se fait facilement par récurrence.

❸ Comme $(b-a-1)S_n\leq a$, on a : $S_n\leq\dfrac{a}{b-(a+1)}$. La suite S_n est croissante et majorée, donc elle converge.

❹ $\lim_{n\to+\infty}(b-a-1)S_{n-1}=(b-a-1)S$, donc $\lim_{n\to\infty}(n+b)u_n=a-(b-a-1)S$.

Supposons que $l=a-(b-a-1)S$ soit non nul, alors $u_n\approx\dfrac{l}{n+b}$, d'après le critère sur les séries dont le terme général garde un signe fixe. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ divergerait, ce qui est faux.

En conclusion $S=\dfrac{a}{b-a-1}$.

EXERCICE n° 2

❶ Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe $a \in [0,1]$ telle que $f(a) > 0$ (par exemple, sinon on remplace f par $-f$). Comme f est continue, il existe un voisinage de a, à savoir il existe un intervalle $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$ f reste strictement positive.

❷ On construit un polynôme P qui vérifie $P(0)=0, P(\alpha)=1, P(\beta)=1$ et $P(1)=0$. Par exemple $P(x)=\sum_{k=0}^{3} a_k x^k$ avec les conditions:
$a_0 = 0,\ a_1+a_2+a_3 = 0,\ a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 = 1,\ a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 = 1$ dans la cas général où $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 1$.

❸ On a :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^1 f(x)(P(x))^n\,dx = \underset{n\to+\infty}{Lim} \left(\int_0^{\alpha} f(x)(P(x))^n\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)(P(x))^n\,dx + \int_{\beta}^{1} f(x)(P(x))^n\,dx \right)$$

$\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^1 f(x)(P(x))^n\,dx = \underset{n\to+\infty}{Lim} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)(P(x))^n\,dx = +\infty$, (car $P(x) > 1$ sur l'intervalle $]\alpha,\beta[$)

❹ $\int_0^1 f(x)(P(x))^n\,dx = \int_0^1 f(x)\left(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right)^n dx = \sum_{k=0}^{np}\left(\int_0^1 f(x) b_k x^k\right) = 0$ par hypothèse.

L'hypothèse $f \neq 0$ est donc absurde puisque l'on obtient une contradiction entre les questions 3 et 4. En conclusion $f \equiv 0$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

EXERCICE n° 3

❶ $f_n'(x) = x^{n-1}\sin nx + x^n \cos nx = x^{n-1}(\sin nx + x\cos nx)$

Sur l'intervalle $[-a,a]$, on a $\underset{x}{Sup}\left|f_n'(x)\right| \leq a^{n-1}(a+1)$ et $\sum a^{n-1}$ converge puisque $a \in]0,1[$.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ est donc normalement convergente sur l'intervalle $[-a,a]$.

❷ Pour $x=0$, $f_n(0)=0$ et $\sum f_n(0)$ converge simplement.

Pour x fixé non nul, $\underset{n\to\infty}{Lim}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \underset{n\to\infty}{Lim}|x|\frac{n}{n+1}\left|\frac{\sin(n+1)x}{\sin nx}\right| = |x| < 1$, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,1[$ vers une fonction f d'après le théorème de d'Alembert.

Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)$ est normalement convergente (question 1), elle converge uniformément et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x) = f^{'}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $[-a,a]$.

❸ On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1}\sin nx + x^n \cos nx) = \frac{1}{x}\mathrm{Im}(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx}) + \mathrm{Re}(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx})$$

Par ailleurs, $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (xe^{ix})^n = \frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}} = \frac{x(\cos x - x) + ix\sin x}{(1-x\cos x)^2 + (x\sin x)^2}$

En conclusion $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x) = \frac{x(\cos x - x) + \sin x}{(1-x\cos x)^2 + (x\sin x)^2}$

❹ On vérifie que la dérivée de cette fonction $f(x) = Arc\tan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$ est égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x) = \frac{x(\cos x - x) + \sin x}{(1-x\cos x)^2 + (x\sin x)^2}$

EXERCICE n° 4

❶ Par hypothèse

$$\exists \eta > 0,\ \forall x,\ x\in]0,\eta[\Rightarrow x^2 f^{''}(x) \geq -k$$

Soit alors $\alpha > 1$ fixé, et $x < \frac{\eta}{\alpha}$

$$f(\alpha x) = f(x) + (\alpha - 1)x f^{'}(x) + \frac{(\alpha-1)^2}{2}x^2 f^{''}(\sigma)$$

où $\sigma \in]x, \alpha x[$, on en déduit

$$x f^{'}(x) = \frac{f(\alpha x) - f(x)}{\alpha - 1} - \frac{\alpha - 1}{2}x^2 f^{''}(\sigma)$$

mais

$$x^2 f''(\sigma)=\frac{x^2}{\sigma^2}\sigma^2\ f''(\sigma^2)\geq -k\frac{x^2}{\sigma^2}$$

donc

$$-\frac{(\alpha-1)}{2}x^2\ f''(\sigma)\leq\frac{\alpha-1}{2}k\frac{x^2}{\sigma^2}\leq\frac{\alpha-1}{2}k$$

Soit $\varepsilon>0$, on peut choisir $\alpha>1$ tel que $(\alpha-1)k<\varepsilon$ (k peut être supposé positif); pour α ainsi fixé $\underset{x\to 0}{Lim}\frac{f(\alpha x)-f(x)}{\alpha-1}=0$, donc

$$\exists\eta_1<\eta,\ 0<x<\eta_1\ \Rightarrow\frac{f(\alpha x)-f(x)}{\alpha-1}<\frac{\varepsilon}{2}$$

et, par suite,

$$x\in]0,\eta_1[\Rightarrow xf'(x)<\varepsilon$$

Fixons maintenant $0<\alpha<1$, on a de même

$$x\,f'(x)=\frac{f(x)-f(\alpha x)}{1-\alpha}+\frac{1-\alpha}{2}x^2\ f''(\sigma),\quad \alpha x<\sigma<x$$

avec

$$\frac{1-\alpha}{2}x^2\ f''(\sigma)\geq-\frac{1-\alpha}{2}k\frac{x^2}{\sigma^2}\geq-\frac{1-\alpha}{2\alpha^2}k$$

On peut choisir α tel que $\frac{1-\alpha}{\alpha^2}k<\varepsilon$, comme ci-dessus on obtient $\eta_2<\eta$ tel que

$$0<x<\eta_2\ \Rightarrow xf'(x)>-\varepsilon$$

On a donc

$$\forall\, x\in]0,Inf(\eta_1,\eta_2[\ ,\ |xf'(x)|<\varepsilon$$

et la propriété est démontrée.

❷ Soit $\varphi(x)=f(x)-\frac{x}{3}f'(x)$ et $\varphi(0)=0$

Par dérivation, on obtient :

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}f'(x)-\frac{x}{3}f''(x)\text{ et }\varphi'(0)=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{1}{3}f''(x)-\frac{x}{3}f'''(x)\text{ et }\varphi''(0)=0$$

$$\varphi'''(x)=-\frac{x}{3}f^{(4)}(x)\text{ et }\varphi'''(0)=0$$

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\left|f^{5}(x)\right|\leq M\Rightarrow\left|f^{(4)}(x)-f^{(4)}(0)\right|\leq M|x|$$

d'où

$$\forall\, x\in R,\ \left|\varphi'''(x)\right|\leq M\frac{x^2}{3}$$

Par application successive des accroissements finis, on obtient alors

$$\left|\varphi''(x)-\varphi''(0)\right|=\left|\varphi''(x)\right|\leq M\frac{|x|^3}{9}$$

$$\left|\varphi'(x)-\varphi'(0)\right|=\left|\varphi'(x)\right|\leq M\frac{x^4}{36}$$

$$\left|\varphi\ (x)-\varphi\ (0)\right|=\left|\varphi\ (x)\right|\leq M\frac{|x|^5}{180}$$

En appliquant ceci à la fonction définie par : $f(x) = M\dfrac{x^5}{120}$ pour laquelle $f^5(x) = M$, on obtient :

$$\varphi(x)=\frac{x^5}{120}M-\frac{x^5}{72}M=\frac{x^5}{180}M$$

La valeur $\lambda=\dfrac{1}{180}$ est donc la meilleure valeur possible.

EXERCICE n° 5

❶ Supposons que la suite (x_n) soit croissante, alors :

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leq\frac{1}{n}nx_n = x_n$$

Pour n fixé et $m>n$:

$$u_m=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{m}x_k\geq\frac{1}{m}\sum_{1}^{n}x_k+\frac{m-n+1}{m}x_n$$

Puis quand $m\to\infty$, $\underset{m\to\infty}{Lim}\, u_m=l\geq x_n$

donc $l\geq x_n\geq u_n$ et par passage à la limite $(x_n)\to l$

❷ La suite $(x_n)=(-1)^n$ n'est pas monotone et ne converge pas, pourtant $u_n=\dfrac{-1+(-1)^n}{n}$ tend vers zéro.

EXERCICE n° 6

❶ f est continue en 0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

En effet, si $x \in I - Q$, on a : $f(x) = \dfrac{x}{1+x} \to 0$ quand $x \to 0$ et

si $x \in I \cap Q$, $\left|\dfrac{p}{q}\right| < \alpha \Rightarrow |f(x)| = \left|\dfrac{x}{1+x+\dfrac{1}{q}}\right| \leq |x|$

❷ Soit $x_0 = \dfrac{p_0}{q_0} \in I \cap Q^*$,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I-Q}} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x}{1+x} = \frac{x_0}{1+x_0} \neq f(x_0) = \frac{x_0}{1+x_0+\dfrac{1}{q_0}}$$

donc f n'est pas continue sur $I \cap Q^*$

❸ Montrons que f est continue sur $I - Q$

f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Si $x \in I - Q$, la relation est vérifiée car f restreinte à $I - Q$ est continue.

Si $x = \dfrac{p}{q} \in I \cap Q^*$, alors

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x}{1+x+\dfrac{1}{q}} - \frac{x_0}{1+x_0}\right| = \frac{|x - x_0 - x_0/q|}{(1+x_0)(1+x_0+1/q+x+x_0)} \leq \frac{|x-x_0| + |x_0|/q}{1/2(1+x_0)^2}$$

dès que $|x - x_0| \leq 1/2(1+x_0)$, alors

$$1 + x_0 + \frac{1}{q} + x - x_0 \geq 1 + x_0 + \frac{1}{q} - |x - x_0| \geq \frac{1}{2}(1+x_0)$$

Considérons les rationnels tels que $\dfrac{|x_0|}{q} \geq \dfrac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon$ ou $q \leq \dfrac{4|x_0|}{(1+x_0)^2\varepsilon}$

Ces rationnels sont en nombre fini dans tout intervalle borné. Soit β le minimum de la distance de x_0 à ces points. On a pour $x \in I \cap Q^*$,

$$|x - x_0| < Inf\left(\frac{1}{2}(1+x_0), \beta, \frac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon\right) = \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$