

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES



EXERCICE n° 1

Soient deux nombres réels a et b strictement positifs fixés. Pour tout entier naturel

n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \frac{a+k}{b+k}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

❶ Simplifier l'expression de u_n dans le cas $b=a+1$.

En déduire que, si $b \leq a+1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ diverge.

On suppose dans toute la suite que $b > a+1$

❷ Montrer que pour tout entier n , on a : $(b-a-1)S_n = a - (n+1+b)u_{n+1}$

❸ En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge. On note S sa somme.

❹ Montrer que la suite $(n+b)u_n$ converge, puis que sa limite est nécessairement nulle. En déduire la valeur de S .

EXERCICE n° 2

Soit f une fonction réelle définie continue sur $[0,1]$. On pose : $a_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$, pour tout entier naturel n . On suppose $a_n = 0$ pour tout entier naturel n . On veut montrer que f est alors identiquement nulle sur $[0,1]$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant f non nulle.

❶ Montrer qu'il reste un intervalle fermé $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ sur lequel f garde un signe constant sans s'annuler.

On supposera dans la suite que f est strictement positive sur $[\alpha, \beta]$.

❷ Montrer qu'il existe un polynôme P défini sur l'ensemble des nombres réels tel que :

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 & \forall x \in [0,1] \\ P(x) > 1 & \forall x \in]\alpha, \beta[\\ P(x) < 1 & \forall x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

❸ Montrer que ce polynôme vérifie : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) (P(x))^n dx = +\infty$

❹ Montrer directement que : $\int_0^1 f(x) (P(x))^n dx = 0$ pour tout entier naturel n . Conclure.



EXERCICE n° 3

Pour tout entier naturel non nul n , on définit la fonction réelle f_n par la relation $f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$

❶ Soit $a \in]0,1[$ un réel fixé. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , la fonction f_n est dérivable et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ converge normalement sur l'intervalle $[-a, a]$.

② En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur l'intervalle $] -1,1[$ vers une fonction f de classe C^1 sur $] -1,1[$, et que f' est la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$

③ Calculer, pour tout $x \in] -1,1[$, la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$

④ En déduire que, pour tout $x \in] -1,1[$, $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right)$



EXERCICE n° 4

Les deux questions sont indépendantes. R désigne l'ensemble des nombres réels, R_+^* celui des nombres réels strictement positifs et C^p les fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre p .

① Soit $f \in C^2(R_+^*, R)$ telle qu'il existe $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et que, dans un voisinage à droite de zéro, $f''(x) \geq -\frac{k}{x^2}$, où k est une constante. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x f'(x) = 0$

② Soit $f \in C^5(R, R)$ une fonction impaire vérifiant :

$$(1) f(0) = 0$$

$$(2) \exists M > 0, \forall x \in R, |f^{(5)}(x)| \leq M$$

Montrer que pour tout réel x , $\left| f(x) - \frac{x}{3} f'(x) \right| \leq \lambda M |x|^5$

Déterminer, la meilleure constante possible λ

EXERCICE n° 5

Soit (x_n) une suite réelle monotone telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = l$

① Montrer que la suite (x_n) est convergente vers l

② Montrer que le résultat n'est plus vrai si la suite n'est pas monotone

EXERCICE n° 6



Soit f une fonction numérique définie sur $I =]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \in I - Q \\ \frac{p}{p+q+1} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in I \cap Q \end{cases}$$

où p et q sont premiers entre eux, $q > 0$, Q désigne l'ensemble des nombres rationnels et Q^* l'ensemble des nombres rationnels non nuls.

- ❶ Montrer que f est continue en 0.
- ❷ Etudier la continuité de f sur $Q^* \cap I$
- ❸ Etudier la continuité de f sur $I - Q$