ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère deux variables réelles discrètes X et Y définies par $X=(x_1,...,x_n)$ et $Y=(y_1,...,y_n)$.

❶ On pose : $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$. Cette fonction est strictement convexe et admet donc un minimum pour les valeurs qui annulent les deux dérivées partielles, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0$$

La résolution du système donne :

$$b=\overline{Y}-a\overline{X} \text{ et } a=\frac{\sum_i x_i y_i-n\overline{XY}}{\sum_i x_i^2-n\overline{X}^2}$$

❷ On trouve $\overline{X}=14$, $\overline{Y}=50$, d'où $a=1{,}56$ et $b=28{,}125$

EXERCICE n° 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels. A cette suite, on associe deux autres suites (s_n) et (r_n) définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$$

❶ Pour $n = 2$, $r_2 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2} = u_1 + \frac{u_2}{2}$. La relation est donc vérifiée.

$$r_{n+1} = r_n + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n} + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n(n+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1}$$

❷ $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$

La première série est convergente et le deuxième terme tend vers zéro par hypothèse. La suite (r_n) a donc une limite finie et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

❸ Soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Pour n grand, $|s_n| \leq l$ et $\left|\frac{s_n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{l}{n(n+1)}$, donc l'hypothèse 2a) est vérifiée. De plus $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$, et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est convergente d'après la question précédente.

❹ On vérifie que : $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$ et que la série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ est convergente.

❺. On considère la suite (s_n) définie par :

$$s_n = \begin{cases} 2k & si \;\; n = 2k \\ -(2k+1) & si \;\; n = 2k+1 \end{cases}$$

. Elle vérifie les relations demandées. En effet :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{E(n+1/2)-1} \frac{1}{2k+2} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} - \frac{1}{2}$$

(série convergente) et $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n}$ n'existe pas.

EXERCICE n° 3

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans A et un jeton dans B que l'on échange en les replaçant dans B et A (étape 1).Puis on recommence la même opération.
Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

❶ Les valeurs possibles de X_n sont 0, 1 ou 2.

❷ Calcul de la probabilité de passage d'un état n à un état $n+1$:

Etat n	Etat $n+1$	Probabilité P
(0, 0)	(0, 1)	1
(1, 1)	(0, 1)	1
(0, 1)	(0, 0)	1/4
(0, 1)	(0, 1)	2/4
(0, 1)	(1, 1)	1/4

❸ $a_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4} b_n$,

$c_{n+1} = P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} b_n$ et $b_{n+1} = P(X_{n+1} = 1) = a_n + c_n + \frac{1}{2} b_n$, puis

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \text{ d'où } T = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

❹ Du système précédent, on peut en déduire que si les suites convergent, alors $\underset{n}{Lim}\, a_n = \underset{n}{Lim}\, c_n = 4 \underset{n}{Lim}\, b_n$

La matrice T admet pour valeurs propres : 1, 0 et –1/2. Comme ces valeurs sont distinctes la matrice est diagonalisable.
Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par (1, 4, 1).
Le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par (1, 0, -1).
Le sous espace propre associé à la valeur propre -1/2 est engendré par (1, -2, 1).

On obtient : $T^n = P\Delta^n P^{-1}$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$V_{n+1} = T^n V_1 = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+1/2^n \\ 4-1/2^{n-1} \\ 1+1/2^n \end{pmatrix}$

En conclusion $\lim\limits_{n} a_n = \lim\limits_{n} c_n = \frac{1}{6}$ et $\lim\limits_{n} b_n = \frac{2}{3}$

EXERCICE n° 4

❶ On vérifie que $f(-x) = -f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

❷ Vérifions que f est dérivable à l'origine : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2-1)+1}{x^2} = \frac{u(x^2)}{x^2}$.

Puis $u'(t) = (2t+1)\exp(t)$, donc $u(t) > 0$ sur R^{+*}.

La fonction f est strictement croissante et continue sur R, elle est donc bijective et admet une fonction réciproque également impaire.

❸ $e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + ... + \frac{(x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$

$$\frac{e^{x^2}-1}{x} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1})$$

Pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x + \frac{x^3}{2!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{n!} + x^{2n-1}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On prolonge ε en 0 par $\varepsilon(0) = 0$

❹ $f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$

Pour f^{-1}, il suffit de résoudre le système linéaire obtenu en écrivant :

$f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$ et

$$f^{-1} o\, f(x) = x \;\Rightarrow\; a_1\,(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}) + a_3\,(x^3 + 3\frac{x^5}{2}) + a_5 x^5 + o(x^5) = x$$

d'où le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \dfrac{a_1}{2} + a_3 = 0 \\ \dfrac{a_1}{6} + \dfrac{2}{3}a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\dfrac{1}{2} \\ a_5 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient : $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{12}x^5 + o(x^5)$

EXERCICE n° 5

Fomesoutra.com
ça soutra !

❶ Comme A, B et $A + B$ sont des parties majorées non vides de R, les bornes supérieures respectives existent. Notons $a = SupA$ et $b = SupB$.

a) $\forall x \in A, x \le a$ et $\forall y \in B, y \le b$, donc $\forall z \in A + B, z \le a + b$.

$a + b$ est donc un majorant de $A + B$.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / x > a - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\exists y \in B / y > b - \frac{\varepsilon}{2}$, donc $\exists z = x + y \in A + B / z > a + b - \varepsilon$.

$a + b$ est donc le plus petit des majorants de $A + B$.

Ces deux assertions montrent que

$$Sup(A + B) = Sup(A) + Sup(B)$$

❷ Comme A, B et AB sont des parties majorées non vides de R^+, les bornes supérieures respectives existent. Notons encore $a = SupA$ et $b = SupB$.

a) $\forall x \in A, x \le a$ et $\forall y \in B, y \le b$, donc $\forall z \in AB, z \le ab$ (car toutes les valeurs sont positives).

ab est donc un majorant de AB.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / x > a - \varepsilon$ et $\exists y \in B / y > b - \varepsilon$, donc $\exists z = xy \in AB / z > ab - \varepsilon\,(a + b - \varepsilon)$. Il suffit de choisir $\varepsilon < Min(a,b)$.

ab est donc le plus petit des majorants de AB.

Ces deux assertions montrent que

$$Sup(AB) = Sup(A) \cdot Sup(B)$$

EXERCICE n° 6

❶ Pour que l'intégrale $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ soit définie, il faut $1-t^2>0$, soit $-1<t<1$. Cette fonction étant impaire, il suffit de faire l'étude pour $x\geq 0$. Pour $x=1$, on a une intégrale généralisée de seconde espèce convergente (en effet au voisinage de 1, $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ et l'intégrale est convergente). Donc l'intégrale est définie sur $[-1,1]$.

Sa dérivée est : $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction est continue et strictement croissante, elle est donc bijective et admet une application réciproque.

❷ - On a $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}$, g est impaire et $g''(x)=\frac{\frac{-x^3}{2}}{(1+\frac{x^4}{4})^{3/2}}$.

La fonction est donc strictement croissante, concave sur R^+ et convexe sur R^-

$$g(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt$$

- Pour $0\leq x\leq 1$, $1\leq\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}\leq\sqrt{\frac{5}{4}}$, d'où $\frac{2}{\sqrt{5}}\leq g'(x)\leq 1$

Pour $x\geq 1$, $g'(x)<\frac{2}{x^2}$ (on vérifie cette inégalité par élévation au carré)

- Pour $x\geq 1$, on a :

$$0\leq g(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt\leq\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt+\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt\leq\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt+\int_1^x \frac{2}{t^2}dt\leq\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt+2$$

- La fonction g est continue, strictement croissante et majorée, donc elle admet une limite finie a quand $x\to+\infty$.

❸ g est inversible. Notons φ l'application réciproque de g, on a :

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\frac{x^3}{3!}\varphi^3(0)+o(x^3)$$

Par ailleurs, $\varphi'(x)=\sqrt{1+\frac{\varphi''(x)}{4}}$, $\varphi'(0)=1, \varphi''(0)=0$ (φ *impaire*) et $\varphi^3(0)=0$

On obtient : $\varphi(x)=x+o(x^3)$