

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1



On considère deux variables réelles discrètes X et Y définies par $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

❶ Trouver des valeurs de a et b qui minimisent la quantité suivante (on justifiera l'existence de telles valeurs) :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

❷ Calculer a et b pour les données suivantes :

x_i	y_i
8	43
6	35
9	45
15	48
16	50
20	60
21	62
17	57

EXERCICE n° 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels. A cette suite, on associe deux autres suites (s_n) et (r_n) définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ et } r_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$$



❶ Montrer que $r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 2$

❷ On suppose que :

- La série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ converge, et
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0$

Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

❸ On suppose que la série de terme général u_n converge, montrer alors que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est aussi convergente.

❹ On pose $u_n = (-1)^n$. Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

❺ Donner un exemple de suite (s_n) telle que :

- La série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ converge, et
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} \neq 0$

EXERCICE n° 3

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans A et un jeton dans B que l'on échange en les replaçant dans B et A (étape 1). Puis on recommence la même opération.

Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

❶ Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

❷ Soit (k, i) un couple d'événements possibles de X_n . Calculer la probabilité que $X_{n+1} = k$ sachant que $X_n = i$.

❸ On pose $a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$, $c_n = P(X_n = 2)$, puis $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$,

où P désigne la probabilité.

Trouver une matrice T telle que : $V_{n+1} = TV_n$

❹ Etudier la suite vectorielle (V_n) et déterminer, si elles existent, les limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .



EXERCICE n° 4

Soit f l'application définie sur l'ensemble des nombres réels (désigné par R) par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\exp(x^2) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

❶ Montrer que f est impaire et continue.

❷ Montrer que f' garde un signe constant sur R . On pourra étudier la fonction u qui, à tout t réel positif, associe : $u(t) = (2t - 1)\exp(t) + 1$.
En déduire l'existence d'une application réciproque de f , impaire.

❸ Justifier l'existence d'un développement limité de f en 0 à tout ordre n .

❹ Ecrire un développement limité de f en 0 à l'ordre 5, donner également un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

EXERCICE n° 5

❶ Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels).

On note $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Montrer que :

$$\text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$$

❷ Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}^+$ (ensemble des nombres réels positifs).

On note $AB = \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\}$. Montrer que :

$$\text{Sup}(AB) = \text{Sup}(A) \cdot \text{Sup}(B)$$



EXERCICE n° 6

❶ Pour quelles valeurs de x , l'intégrale suivante est-elle définie :

$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Montrer que f admet une application réciproque.

❷ Soit g la fonction numérique définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{t^4}{4}}} dt$$

- Etudier les variations et la convexité de g .
- Montrer que : $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq g'(x) \leq 1$ pour $0 \leq x \leq 1$, et $g'(x) < \frac{2}{x^2}$ pour $x \geq 1$.
- En déduire un encadrement de $g(x)$ pour $x \geq 1$.
- Montrer que g admet une limite finie a quand $x \rightarrow +\infty$.

❸ Montrer que g est inversible et donner un développement limité de sa fonction réciproque, au voisinage de 0, à l'ordre 3.