AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On multiplie la relation par e^{-bt} pour obtenir :

$$f(t)e^{-bt} \leq ae^{-bt} + be^{-bt}\int_0^t f(u)\,du$$

d'où $f(t)e^{-bt} - be^{-bt}\int_0^t f(u)\,du \leq ae^{-bt}$ ou encore $\frac{d}{dt}(e^{-bt}\int_0^t f(u)\,du) \leq ae^{-bt}$

Puis en intégrant sur $[0,t]$, on obtient :

$e^{-bt}\int_0^t f(u)\,du \leq \frac{a}{b}(1-e^{-bt})$ et $a+b\int_0^t f(u)\,du \leq ae^{bt}$, d'où $f(t) \leq a\,e^{bt}$

Exercice n° 2

L'intégrale étant dérivable, le produit $x\,f(x)$ est dérivable, donc f est dérivable sauf peut-être en 0, par dérivation on obtient donc une condition nécessaire sur f :

$$f(x) = \frac{1}{3}[f(x)+2f(0)] + \frac{x}{3}f'(x)$$

f apparaît comme solution de l'équation différentielle :

$$x\,y' - 2y = -2f(0)$$

L'intégration immédiate donne :

$$f(x) = f(0) + \mu\,x^2$$

On vérifie facilement que ces fonctions conviennent.

Exercice n° 3

a) La matrice Ω est orthogonale droite si les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux et unitaires :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad ab + bc + ca = 0$$

et si :

$$\det \Omega = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a + b + c = 1$$

Les deux conditions $\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$

entraînent d'ailleurs les conditions précédentes et sont suffisantes pour entraîner la propriété ; elles montrent que a, b, c doivent être solutions d'une équation de la forme $t^3 - t^2 + k = 0$, dont les racines doivent être réelles, ce qui s'écrit, on le voit facilement d'après le tableau de variation de la fonction $f(t) = t^3 - t^2$, $0 = f(0) \leq k \leq f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$.

b) Posons $k = \frac{4}{27}\sin^2\varphi$, avec $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, et faisons dans l'équation le changement de variable $t = \frac{1}{3} + \lambda\cos\theta$

Pour $\lambda = \frac{2}{3}$, l'équation se simplifie et devient :

$$\frac{2}{27}(4\cos^2\theta - 3\cos\theta) = \frac{2}{27}\cos 2\varphi \quad \text{ou} \quad \cos 3\theta = \cos 2\varphi$$

ce qui donne : $\theta = \pm(\frac{2}{3}\varphi + \frac{2n\pi}{3})$. On obtient ainsi, à une permutation près :

$$a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi}{3}, \qquad b = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi + 2\pi}{3}, \qquad c = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi - 2\pi}{3}$$

L'axe de la rotation est un vecteur propre pour la valeur propre 1, en remarquant que $a + b + c = 1$, on trouve comme vecteur directeur unitaire $\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice n° 4

❶ f étant une fonction continue et bornée, l'intégrale est convergente.

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx$ et effectuons le changement de variable $t = nx$, on obtient :

$$I_n - f(0) = \int_0^{+\infty} \left(f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right) e^{-t}\, dt$$

Notons M la borne supérieure de la valeur absolue de f sur R^+.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe T tel que :

$$2M \int_T^{+\infty} e^{-t}\, dt = 2Me^{-T} < \frac{\varepsilon}{2}$$

T étant ainsi choisi,

$$\left| I_n - f(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^T \left| f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right| e^{-t}\, dt$$

La continuité de f en 0 assure que :

$$\exists \eta,\ \forall x,\quad 0 < x < \eta \ \Rightarrow\ \left| f(x) - f(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2T}$$

alors, $\forall n,\ \ n > \dfrac{T}{\eta} \Rightarrow \left| I_n - f(0) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2T} \displaystyle\int_0^T e^{-t}\, dt < \varepsilon$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx = f(0)$.

❷ Dans la deuxième intégrale, le même changement de variable conduit à : $J_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \frac{dt}{1+t^2}$ et $J_n - f(0) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right) \frac{dt}{1+t^2}$

La même démonstration que dans la question précédente conduit à la même conclusion, à savoir $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{n\, f(x)}{1+n^2x^2}\, dx = f(0)$

❸ Si f est en outre dérivable en 0,

$$f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)=\frac{t}{n}f'(0)+\frac{t}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{n}\right)$$

avec $\underset{u\to 0}{Lim}\,\varepsilon(u)=0$, donc :

$$I_n-f(0)=\int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{t}{n}f'(0)+\frac{t}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{n}\right)\right)e^{-t}\,dt+\int_{\sqrt{n}}^{\infty}\left(f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)\right)e^{-t}\,dt$$

La deuxième intégrale est majorée par $2M\,e^{-\sqrt{n}}$, c'est donc un $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{t}{n}f'(0)+\frac{t}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{n}\right)\right)e^{-t}\,dt=\frac{f'(0)}{n}\int_0^{\sqrt{n}}t\,e^{-t}\,dt+\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}}t\varepsilon\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}\,dt$

On a : $\displaystyle\frac{f'(0)}{n}\int_0^{\sqrt{n}}t\,e^{-t}\,dt=\frac{f'(0)}{n}\left[-(t+1)e^{-t}\right]_0^{\sqrt{n}}\simeq\frac{f'(0)}{n}$

Pour $t\in[0,\sqrt{n}]$, $\left|\varepsilon\left(\frac{t}{n}\right)\right|<\varepsilon$, car $\frac{t}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$, et la deuxième intégrale précédente est aussi un $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

En conclusion :

$$I_n-f(0)=\frac{f'(0)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice n° 5

Soit X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a)=\left\{u\in R^2\,/\,\exists(u_n)\in X,\exists(\lambda_n)>0,\underset{n\to\infty}{Lim}\,u_n=a,\underset{n\to\infty}{Lim}\,\lambda_n(u_n-a)=u\right\}$$

❶ On vérifie aisément que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$, en posant $\lambda_n=n$ et $u_n=a$

❷

a) Si $u \in T(X,a)$ où $X = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$ et $a = (1,0)$

Soit une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans X qui converge vers a et $\lambda_n (u_n - a) \to u = (x,y)$.

En particulier, $\lambda_n (x_n - 1) \to x$, $\lambda_n y_n \to y$, $x_n \to 1$ et $y_n \to 0$.

Comme $u_n \in X$, $\lambda_n x_n^2 + \lambda_n y_n^2 = \lambda_n$ ou encore $\lambda_n (x_n - 1)(x_n + 1) + \lambda_n y_n y_n = 0$

Et par passage à la limite, on obtient $x = 0$.

On vérifie la réciproque pour obtenir $T(X,a) = \{(x,y) / x = 0\}$. Par exemple $x_n = \sqrt{1 - (1/n^2)}$, $y_n = (1/n)$ et $\lambda_n = y_n$

b) Si $u \in T(X,a)$ où $X = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $a = (1,0)$

Soit une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans X qui converge vers a et $\lambda_n (u_n - a) \to u$.

En particulier, $\lambda_n (x_n - 1) \to x$, $\lambda_n y_n \to y$, $x_n \to 1$ et $y_n \to 0$.

Comme $u_n \in X$, $\lambda_n x_n^2 + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n$ ou encore $\lambda_n (x_n - 1)(x_n + 1) + \lambda_n y_n y_n \leq 0$

Et par passage à la limite, on obtient $x \leq 0$.

Réciproquement, on pose $x_n = 1 + \dfrac{x}{n}$ et $y_n = \dfrac{y}{n}$, alors $x_n \to 1$ et $y_n \to 0$.

Et pour $\lambda_n = n$, $\lambda_n (x_n - 1) \to x$ et $\lambda_n y_n \to y$.

Il reste à vérifier que la suite $u_n = (x_n, y_n)$ est bien dans X. En effet, pour *n* grand, $\lambda_n x_n^2 + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n$ pour $x \leq 0$.

On obtient : $T(X,a) = \{(x,y) / x \leq 0\}$

c) Si $u \in T(X,a)$ où $X = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x \geq 0,\ -x^2 \leq y \leq x^2\}$ et $a = (0,0)$

Soit une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans X qui converge vers a et $\lambda_n (u_n - a) \to u = (x,y)$.

En particulier, $\lambda_n x_n \to x$, $\lambda_n y_n \to y$, $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$.

Comme $u_n \in X$, $-\lambda_n x_n^2 \leq \lambda_n y_n \leq \lambda_n x_n^2$ et $x_n \geq 0$.

Et par passage à la limite, on obtient $y = 0$ et $x \geq 0$

La réciproque est évidente en posant $x_n = \dfrac{x}{n}$ (avec $x > 0$), $y_n = 0$ et $\lambda_n = n$, pour obtenir la demie droite :

$$T(X,a) = \{(x,y) / x \geq 0,\ y = 0\}$$

Exercice n° 6

❶ $\varphi_0(n)=n$ et $\varphi_1(n)=\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

❷ $F_0(x)=1$ et $F_1(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}=e^x+1$

En 0, $F_t(x)$ est équivalent à $\dfrac{(1+t)x}{x}$. On peut donc prolonger F_t par continuité en 0 en posant $F_t(0)=1+t$.

En développant le numérateur à l'ordre 2, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F_t(x)-F_t(0)}{x}=\dfrac{t(t+1)}{2}=F_t^{'}(0)$

❸ En identifiant un développement limité avec la formule de Taylor, on trouve $\psi_0(t)=F_0(t)-1=t$ et $\psi_1(t)=F_1^{'}(0)=\dfrac{t(t+1)}{2}$

❹ $F_n(x)=\dfrac{(e^x)^{n+1}-1}{e^x-1}=1+e^x+\ldots+e^{nx}=\sum_{k=0}^{n} e^{kx}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{k^p x^p}{p!}$ et le coefficient de $\dfrac{x^p}{p!}$ est alors $\sum_{k=0}^{n} k^p$

❺ L'égalité $\left(1+\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\varphi_i(t)}{i!}x^i+o(x^N)\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\dfrac{x^j}{j!}+o(x^N)\right)=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{(1+t)^k}{k!}x^k+o(x^N)$

conduit par identification des coefficients de x^{p+1}, à :

$$\frac{1}{(p+1)!}+\frac{\varphi_0(t)}{(p+1)!}+\frac{\varphi_1(t)}{1!}\frac{1}{p!}+\frac{\varphi_2(t)}{2!}\frac{1}{(p-1)!}+\ldots+\frac{\varphi_p(t)}{p!}\frac{1}{1!}=\frac{(t+1)^{p+1}}{(p+1)!}$$

soit, en multipliant les deux expressions par $(p+1)!$, on obtient la relation recherchée.

❻ Des relations :

$$p=0 \quad 1+\varphi_0(t)=1+t$$

$$p=1 \quad 1+\varphi_0(t)+C_2^1\,\varphi_1(t)=(1+t)^2$$

$$p=2 \quad 1+\varphi_0(t)+C_2^1\,\varphi_1(t)+C_3^2\,\varphi_2(t)=(1+t)^3$$

$$p=3 \quad 1+\varphi_0(t)+C_2^1\,\varphi_1(t)+C_3^2\,\varphi_2(t)+C_4^3\,\varphi_3(t)=(1+t)^4$$

on en déduit :

$$\varphi_0(t)=t$$

$$\varphi_1(t)=\frac{t(t+1)}{2}$$

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{6}(2t+1)t(t+1)$$

$$\varphi_3(t)=\frac{1}{4}\frac{t^2(t+1)^2}{2}$$