ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R ***désigne l'ensemble des nombres réels et*** R^+ ***l'ensemble des nombres réels positifs.***

Exercice n° 1

Soit f une fonction numérique définie sur R^+ qui vérifie :

$$\exists b \geq 0,\ \exists a \in R \ /\ f(t) \leq a + b\int_0^t f(u)\,du.$$

Montrer que $f(t) \leq a\,e^{bt}$.

Exercice n° 2

Trouver toutes les fonctions numériques d'une variable réelle continues telles que :

$$\forall x \in R - \{0\}, \quad \int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{3}\left[f(x) + 2f(0)\right].$$

Exercice n° 3

a,b,c étant trois nombres réels, pour que $\Omega = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation, il faut et il suffit que a,b,c soient les racines d'une équation de la forme : $t^3 - t^2 + k = 0$, avec $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$. Vérifier cette condition nécessaire et suffisante et préciser cette rotation pour $k = \frac{4}{27}\sin^2\varphi$ (on peut effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\theta$).

Exercice n° 4

Soit f une fonction continue et bornée sur R^+.

❶ Montrer que $\underset{n\to\infty}{Lim} \int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx = f(0)$.

❷ Montrer que $\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{n\, f(x)}{1+n^2x^2}\, dx = f(0)$.

❸ Si f est en outre dérivable en 0, avec $f^{'}(0) = a \neq 0$, trouver un équivalent de $\int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx - f(0)$ en $\frac{k}{n}$.

Exercice n° 5

Soit X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a) = \left\{ u \in R^2 \,/\, \exists (u_n) \in X, \exists (\lambda_n) > 0, \underset{n\to\infty}{Lim}\, u_n = a, \underset{n\to\infty}{Lim}\, \lambda_n (u_n - a) = u \right\}$$

❶ Montrer que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$.

❷ Déterminer $T(X,a)$ dans les cas suivants :

a) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$ et $a = (1,0)$

b) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ et $a = (1,0)$

c) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x \geq 0, -x^2 \leq y \leq x^2 \right\}$ et $a = (0,0)$

Exercice n° 6

On cherche à déterminer les fonctions $\varphi_p(n)$ telles que :

$$\varphi_p(n) = 1^p + 2^p + ... + n^p$$

❶ Déterminer φ_0 et φ_1.

❷ Pour tout nombre réel t, on considère la fonction numérique F_t définie pour $x \neq 0$ par :

$$F_t(x) = \frac{e^{(1+t)x} - 1}{e^x - 1}$$

- Déterminer F_0 et F_1.

- Montrer que F_t est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée, notée encore F_t, est dérivable en 0. Que valent $F_t(0)$ et $F_t'(0)$?

❸ On suppose que F_t admet un développement limité en 0 à tout ordre p, et l'on pose :

$$F_t(x) = 1 + \psi_0(t) + \frac{\psi_1(t)}{1!}x + \frac{\psi_2(t)}{2!}x^2 + ... + \frac{\psi_p(t)}{p!}x^p + x^p \varepsilon(t)$$

A l'aide de la précédente question, retrouver les valeurs de ψ_0 et ψ_1.

❹ Lorsque t est un entier, $t = n$, écrire la fonction F_n comme la somme de fonctions exponentielles , et montrer alors que $\varphi_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

❺ En identifiant les développements limités des fonctions $F_t(x)(e^x - 1)$ et $e^{(1+t)x} - 1$, montrer que pour tout p, on a :

$$1 + \varphi_0(t) + c_{p+1}^1 \varphi_1(t) + ... + c_{p+1}^p \varphi_p(t) = (1+t)^{p+1}$$

❻ En déduire les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (on essaiera d'en donner une forme factorisée).