

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels et R^+ l'ensemble des nombres réels positifs.

Exercice n° 1

Soit f une fonction numérique de classe C^2 définie sur R telle que $f(0) = 0$.

Pour tout $x \in R$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2} f(x)$

1. Comme f est de classe C^2 , F est aussi de classe C^2 par opération sur les fonctions de classe C^2 . On obtient :

$$F'(x) = f(x) - \frac{1}{2}(f(x) + xf'(x)) \text{ et } F''(x) = -\frac{1}{2}xf''(x)$$

2. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 entre 0 et x :

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \int_0^x \frac{(x-t)}{2} F''(t) dt. \text{ Comme } F(0) = F'(0) = 0, \text{ on obtient :}$$

$$F(x) = -\frac{1}{4} \int_0^x t(x-t) f''(t) dt$$

Exercice n° 2



1. On a $|y_i| = y_i^+ + y_i^-$. Soit L le lagrangien du problème, à savoir :

$$L = \sum_{i=1}^n |y_i| + \lambda \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 1 \right); \text{ sa dérivée est } L' = \pm 1 + 2\lambda y_i. \text{ Cette dérivée est nulle pour}$$

$$y_i = \pm \frac{1}{2\lambda}. \text{ On obtient alors pour la contrainte : } \sum_{i=1}^n y_i^2 = n \times \frac{1}{4\lambda^2} = 1, \text{ puis } \lambda = \pm \frac{\sqrt{n}}{2} \text{ et}$$

$$y_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}. \text{ Le maximum est donc égal à : } \sum_{i=1}^n |y_i| = \sqrt{n}.$$

On peut aussi remarquer qu'il s'agit du maximum d'une fonction linéaire sur la sphère unité (cas identique dans R^n et R^2) et que ce maximum est atteint lorsque toutes les valeurs de y_i sont égales, à savoir pour la contrainte $n \times y_i^2 = 1$, d'où $y_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ et le maximum est égal à $\sqrt{n}$.

$$2. \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^n |y_i| / \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq 1 \right\} \Leftrightarrow \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^n |y_i| / \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 \right\}.$$

Ceci implique que chaque valeur de y_i est en valeur absolue inférieure à 1.

Par conséquent $y_i^2 \leq |y_i|$. Le minimum de $\sum_{i=1}^n |y_i|$ est donc le même que celui de

$\sum_{i=1}^n y_i^2$ qui est égal à 1. Ce minimum est atteint en tous les points de la sphère unité.



Exercice n° 3

1. M_3 correspond à une moyenne mobile arithmétique d'ordre 3. On obtient le tableau suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_t	4	7	4	10	13	10	16	19	16
$M_3 X_t$	-	5	7	9	11	13	15	17	-

2. Les valeurs de $M_3 X_t$ correspondent à une suite arithmétique de raison 2 d'où $M_3 X_t = 2t + 1$

3. Soit $S_t = X_t - M_3 X_t$. On obtient :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_t	-	2	-3	1	2	-3	1	2	-

S_t est une fonction périodique de période 3, dont la somme sur une période est nulle.

4. L'équation $M_{2p+1} X_t = X_t$ est équivalente, pour $X_t = at + b$, à

$$a \left(\sum_{i=-p}^p \theta_i \right) t + \left(\sum_{i=-p}^p i \theta_i \right) + b \left(\sum_{i=-p}^p \theta_i \right) = at + b. \text{ Cette égalité est vérifiée pour}$$

$$\left(\sum_{i=-p}^p \theta_i \right) = 1 \text{ et } \left(\sum_{i=-p}^p i \theta_i \right) = 0$$



5. Pour $X_t = at^2 + bt + c$, l'équation $M_{2p+1} X_t = X_t$ est équivalente à

$$a \left(t^2 \sum_{i=-p}^p \theta_i + 2t \sum_{i=-p}^p i \theta_i + \sum_{i=-p}^p i^2 \theta_i \right) + b \left(t \sum_{i=-p}^p i \theta_i + \sum_{i=-p}^p i \theta_i \right) + c \left(\sum_{i=-p}^p \theta_i \right) = at^2 + bt + c$$

Cette équation est vérifiée pour $\left(\sum_{i=-p}^p \theta_i \right) = 1$, $\left(\sum_{i=-p}^p i \theta_i \right) = 0$ et $\left(\sum_{i=-p}^p i^2 \theta_i \right) = 0$

Exercice n° 4

On définit une suite de matrices carrées de la façon suivante :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{pmatrix} \text{ pour tout } k \geq 2.$$

1. On vérifie que $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. On a $\det(H_2 - \lambda I) = (2 - \lambda I)^2 (2 + \lambda I)^2$ obtenu par combinaison linéaire des colonnes (à la première colonne on ajoute les trois autres, à la deuxième colonne la somme des deux dernières, puis la quatrième à la troisième). On peut aussi procéder de même sur les lignes. Donc -2 et $+2$ sont des valeurs propres doubles de H_2 .

Soit un vecteur $e = (x, y, z, t)$ vérifiant $H_2 e = 2e$. Ce système est équivalent aux équations : $x - 2y - t = 0$ et $y = z$. Le sous espace propre E_2 , de dimension 2, associé à la valeur propre 2 est engendré (par exemple) par les vecteurs propres orthogonaux suivants : $e = (1, 0, 0, 1)$ et $e' = (1, 1, 1, -1)$.

On procède de même pour la valeur propre -2 . Le sous espace propre associé à cette valeur propre vérifie les équations : $2x + 2y + z = 0$ et $x = -t$, d'où les vecteurs propres $e_{-2} = (0, 1, -1, 0)$ et $e'_{-2} = (1, -1, -1, -1)$. De plus ces 4 vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

3. On vérifie facilement par récurrence que $Tr(H_k) = 0$ pour tout $k \geq 2$



Exercice n° 5

1. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. On applique la formule de Taylor à f sur l'intervalle $[a^2, a^2 + 1]$. Il existe c dans cet intervalle ouvert tel que :

$$f(a^2 + 1) = f(a^2) + f'(a^2) + \frac{1}{2}f''(c) \text{ ou encore } \sqrt{a^2 + 1} = a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8c\sqrt{c}}, \text{ d'où}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} - a < \frac{1}{2a}$$

2. De même, on applique la formule de Taylor à l'ordre 3 à f sur l'intervalle $[a^2, a^2 + 1]$.

$$f(a^2 + 1) = f(a^2) + f'(a^2) + \frac{1}{2}f''(a^2) + \frac{1}{6}f'''(c), \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} < \sqrt{a^2 + 1} - a$$

On peut aussi démontrer ces deux questions, par multiplication par la quantité conjuguée.

3. D'après la première question, $|\sqrt{a^2 + 1} - a| = \sqrt{a^2 + 1} - a < \frac{1}{2a} \leq \frac{1}{2}$

On a : $|\sqrt{a^2 + 1} - k| = |a - k + \sqrt{a^2 + 1} - a| \geq |a - k| - |\sqrt{a^2 + 1} - a| \geq 1 - |\sqrt{a^2 + 1} - a| > \frac{1}{2}$, d'où

l'inégalité demandée $|\sqrt{a^2 + 1} - a| < |\sqrt{a^2 + 1} - k|$

4. Soit $a = 25$. D'après les deux premières questions on a :

$$\frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} + a < \sqrt{a^2 + 1} < a + \frac{1}{2a}, \text{ d'où } 25,01 < \sqrt{626} < 25,02.$$

25,02 est une valeur approchée de $\sqrt{626}$ à 10^{-5} près par excès.

D'ailleurs, $\sqrt{626} \approx 25,0199920$

5. Notons Q l'ensemble des nombres rationnels et f la fonction numérique définie par :

$f(x) = x + \frac{1}{2a}(1 + a^2 - x^2)$, on a $f(Q) \subset Q$ car tous les coefficients de f sont rationnels.

Le maximum de f est atteint en a et elle est décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty]$.

$$f\left(a, a + \frac{1}{2a}\right) = \left[f\left(a + \frac{1}{2a}\right), f(a)\right] = \left[a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3}, a + \frac{1}{2a}\right] \subset \left[a, a + \frac{1}{2a}\right]$$

Soit $X = \left[a, a + \frac{1}{2a}\right] \cap Q$, on a $f(X) \subset X$. On démontre alors par récurrence que $t_n \in X$.

Pour $n=0$, $t_0 = a$ qui est un entier. Si $t_n \in X$, alors $t_{n+1} = f(t_n) \in f(X) \subset X$, donc $t_{n+1} \in X$.

6. La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (question 5). Notons encore f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + \frac{1}{2a}(1 + a^2 - x^2)$, sa dérivée est $f'(x) = 1 - \frac{x}{a}$, d'où le tableau de variation :

x	a	$a + 1/2a$
f'		$\downarrow$
f	$a + 1/2a$	$a + 1/2a - 1/8a^3$



La fonction f étant décroissante, les suites extraites de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ordre pair et d'ordre impair sont monotones de sens contraire et comme elles sont bornées, elles sont convergentes vers une même limite l qui vérifie $f(l) = l$ du fait de la continuité de f et de l'unicité de la limite. L'équation $f(l) = l$ est équivalente à $l = l + \frac{1}{2a}(1 + a^2 - l^2)$, d'où $l = \sqrt{1 + a^2}$

Exercice n° 6

1. Soit la fonction numérique d'une variable réelle G définie par $G(t) = f(a + t(x - a))$. On applique le théorème des accroissements finis à G sur l'intervalle $[0, 1]$, il existe un point c de cet intervalle ouvert tel que : $G(1) - G(0) = G'(c)$. Comme G est convexe comme composée d'une fonction convexe f et d'une fonction affine, on a : $G'(c) \geq G'(0)$ et $G'(t) = \langle df(a + t(x - a)), x - a \rangle$ (par composition des différentielles). On obtient alors :

$$G(1) - G(0) = f(x) - f(a) = G'(c) \geq G'(0) = \langle df(a), x - a \rangle$$

2. Par hypothèse, on a :

$$\forall a, x \in A \quad f(x) - f(a) \geq \langle df(a), x - a \rangle$$

et

$$\forall a, x \in A \quad f(a) - f(x) \geq \langle df(x), a - x \rangle$$

Par addition des deux lignes, on obtient :

$$\forall a, x \in A \quad \langle df(a) - df(x), a - x \rangle \geq 0$$



3. On effectue une démonstration par l'absurde.

Supposons que $\exists a, x \in A \quad f(x) - f(a) < \langle df(a), x - a \rangle$

D'après la première question, $f(x) - f(a) = G'(c) = \langle df(a + c(x - a)), x - a \rangle$

Posons $z = a + c(x - a)$, on obtient : $\langle df(a) - df(z), a - x \rangle < 0$. On multiplie cette inégalité par c (strictement positif) et comme $z - a = c(x - a)$, on a : $\langle df(a) - df(z), a - z \rangle < 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse :

$$\forall a, x \in A \quad \langle df(a) - df(x), a - x \rangle \geq 0$$

donc

$$\forall a, x \in A \quad f(x) - f(a) \geq \langle df(a), x - a \rangle$$