

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.



Exercice n° 1

Soit f une fonction numérique de classe C^2 définie sur R telle que $f(0) = 0$

Pour tout $x \in R$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2} f(x)$

1. Montrer que F est de classe C^2 sur R , et calculer sa dérivée seconde.

2. Montrer que pour tout $x \in R$: $F(x) = -\frac{1}{4} \int_0^x t(x-t) f''(t) dt$

Exercice n° 2

Soit y une fonction numérique à valeurs réelles. Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on pose :
 $y_i^+ = \text{Sup}(y_i, 0)$ et $y_i^- = \text{Sup}(-y_i, 0)$

1. Résoudre $\text{Max} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i^+ + y_i^-) / \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 \right\}$ (il s'agit de trouver, s'il existe, le maximum de $\left\{ \sum_{i=1}^n (y_i^+ + y_i^-) \right\}$ sachant que les fonctions y_i doivent vérifier la contrainte $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$)
2. Résoudre $\text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^n |y_i| / \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq 1 \right\}$

Exercice n° 3

On considère une suite finie $X_t, t = 1, 2, \dots, n$

1. Soit M_3 l'application définie par : $M_3 X_t = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$

Transformer les valeurs suivantes de la suite X_t par cette application M_3 :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_t	4	7	4	10	13	10	16	19	16

2. Trouver les valeurs de a et b telles que : $M_3 X_t = at + b$
3. Soit $S_t = X_t - M_3 X_t$. Quelles sont les propriétés de la suite S_t ?
4. De façon plus générale, on pose $M_{2p+1} X_t = \sum_{i=-p}^p \theta_i X_{t+i}$, où les coefficients θ_i sont des nombres réels. On suppose que $X_t = at + b$. Quelles sont les conditions que doivent vérifier les coefficients θ_i pour obtenir : $M_{2p+1} X_t = X_t$
5. On suppose maintenant que $X_t = at^2 + bt + c$. Quelles sont les conditions que doivent vérifier les coefficients θ_i pour obtenir : $M_{2p+1} X_t = X_t$

Exercice n° 4



On définit une suite de matrices carrées de la façon suivante :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{pmatrix} \text{ pour tout } k \geq 2$$

1. Expliciter H_2
2. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres orthogonaux de H_2
3. Montrer que $Tr(H_k) = 0$ pour tout $k \geq 2$

Exercice n° 5

Soit a un entier strictement positif fixé.

1. Montrer que $\sqrt{a^2+1} - a < \frac{1}{2a}$

2. Montrer que $\frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} < \sqrt{a^2+1} - a$

3. En déduire que a est l'entier le plus proche de $\sqrt{a^2+1}$, c'est-à-dire que, pour tout entier naturel k , distinct de a , $|\sqrt{a^2+1} - a| < |\sqrt{a^2+1} - k|$

4. En déduire une valeur approchée décimale de $\sqrt{626}$ à 10^{-5} près par excès.

5. On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$t_0 = a \quad \text{et} \quad t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2a}(1 + a^2 - t_n^2)$$

Montrer que pour tout entier n , t_n est un nombre rationnel appartenant à l'intervalle $\left[a, a + \frac{1}{2a}\right]$

6. Etudier la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$



Exercice n° 6

Soient A un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction numérique différentiable définie sur A .

1. Montrer que si f est convexe, alors :

$$\forall a, x \in A \quad f(x) - f(a) \geq \langle df(a), x - a \rangle$$

On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ et on rappelle qu'une fonction f est convexe si et seulement si elle vérifie $\forall a, x \in A \quad \forall t \in [0,1] \quad f(tx + (1-t)a) \leq tf(x) + (1-t)f(a)$. On pourra utiliser la fonction G définie par $G(t) = f(a + t(x - a))$

2. Montrer que si f vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall a, x \in A \quad f(x) - f(a) \geq \langle df(a), x - a \rangle$$

alors

$$\forall a, x \in A \quad \langle df(a) - df(x), a - x \rangle \geq 0$$

3. Montrer que si f vérifie l'inégalité suivante :



$$\forall a, x \in A \quad \langle df(a) - df(x), a - x \rangle \geq 0$$

alors

$$\forall a, x \in A \quad f(x) - f(a) \geq \langle df(a), x - a \rangle$$