AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit A la matrice d'une application linéaire de R^n dans R^n.

1. On a $\operatorname{Im}(A) \oplus (\operatorname{Im}(A))^{\perp} = R^n$. Soit $u \in KerA'$, alors $A'u = 0$ et pour tout $v \in R^n$, $v'A'u = u'Av = 0$, donc u est orthogonal à $\operatorname{Im}(A)$ et $Ker(A') \subset (\operatorname{Im}(A))^{\perp}$. Réciproquement, si $u \in (\operatorname{Im}(A))^{\perp}$ alors pour tout $v \in R^n$, $u'Av = v'A'u = 0$, d'où $u \in KerA'$. En conclusion : $Ker(A') = (\operatorname{Im}(A))^{\perp}$.

2. Soit $f(v) = \|Av - b\|^2$, f est. une forme quadratique, donc convexe et elle admet un minimum en v si et seulement si sa différentielle est nulle en v. On a $df(v) = 2A'Av - 2A'b = 0$. La solution doit donc vérifier $A'Av = A'b$.
   Comme $\operatorname{Im}(A) \oplus Ker(A') = R^n$, pour tout $b \in R^n$, $b = b_1 + b_2$, avec $b_1 \in \operatorname{Im}(A)$ et $b_2 \in Ker(A')$. On a $A'b_2 = 0$ et il existe $u_0 \in R^n$ tel que $Au_0 = b_1$, d'où $A'b = A'(b_1 + b_2) = A'b_1 = A'Au_0$, donc u_0 vérifie la condition d'optimalité.

3. Soit u_1 est une autre solution du problème précédent de minimisation, alors $A'b = A'Au_1$ et $A'b = A'Au_0$.
   Posons $s = Au_1$ et $r = b - Au_1$, alors $r \in Ker(A')$.
   Comme $\operatorname{Im}(A) \oplus Ker(A') = R^n$, la décomposition $b = b_1 + b_2$ est unique et $s = b_1$ et $b_1 = Au_1 = Au_0$.

4. Dans le cas où le rang de la matrice A est égal à *n*, la matrice est inversible et la condition d'optimalité $A'Av = A'b$ donne $Av = b$ et une seule solution $v = A^{-1}b$

Exercice n° 2

Comme f est non constante, il existe $x < y$ tels que $f(x)$ soit différent de $f(y)$. Soit la droite *D* passant par les points $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$ qui a pour équation $Y = aX + b$, avec $a = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$ puisque f est croissante. Par convexité de f, la droite *D* est au dessus du graphe de f uniquement entre M et N. Donc si $z > y$, on a $f(z) > az + b$ comme $a > 0$; $f(z)$ tend vers $+\infty$ lorsque z tend vers $+\infty$.

Exercice n° 3

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère la fonction numérique f définie sur R^2 par $f(x, y) = x^n + y^n - nxy$.

1. Les points critiques de f correspondent aux solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = nx^{n-1} - ny = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = ny^{n-1} - nx = 0 \end{cases}$$

   On en déduit que $x^{n^2-2n} = 1$, il n'y a que deux racines possibles, à savoir $x = \pm 1$.

   Si n est pair, $n^2 - 2n$ aussi, donc 1 et –1 vérifient $x^{n^2-2n} = 1$. On vérifie réciproquement que les couples $(x, y) = (1,1)$ ou $(-1, -1)$ sont bien solutions du système.

   Si n est impair, $n^2 - 2n$ aussi, et 1 est la seule racine à retenir. On vérifie que $(1,1)$ est solution du système.

2. La fonction f définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ est continue sur le compact $D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$, elle admet sur D un minimum et un maximum.

3. Dans la première question, on a trouvé deux minimums locaux de f sur D et ces deux points appartiennent au domaine D. On calcule $f(1,1) = -2$ et $f(-1,-1) = -2$. Le minimum est donc atteint simultanément en ces deux points.

4. L'inégalité $f(x,y) \leq 16 - 2x^2y^2 - 4xy$ est équivalente à $(x^2 + y^2)^2 \leq 16$ et donc à $(x,y) \in D$. Pour tout couple $(x,y) \in D$, on obtient donc $f(x,y) \leq 16$ si x et y sont de même signe. On remarque que $f(2,0) = 16$ et $f(x,y) = f(-x,-y)$. Si bien que l'on aura prouvé que 16 est le maximum de f sur D si l'on montre que $f(x,y) \leq 16$ lorsque $(x,y) \in D$ vérifie $-2 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$.
   Si $-2 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$,
   $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \leq x^4 + (4-x^2)^2 - 4x\sqrt{4-x^2}$
   De sorte que l'on puisse conclure à $f(x,y) \leq 16$ si l'on prouve que, en posant $t = -x$,
   $\forall t \in [0,2]$ $g(t) = t^4 + (4-t^2)^2 + 4t\sqrt{4-t^2} \leq 16$, ce qui revient à $4 \leq t^2(4-t^2)$.
   Il est maintenant facile de vérifier que $4 \leq u(4-u)$ pour tout $\forall u \in [0,4]$. En effet l'application $\varphi(u) = 4u - u^2$ est dérivable, sa dérivée $\varphi'(u) = 4 - 2u$ s'annule pour $u = 2$ et elle admet un minimum en ce point.
   Le maximum de f sur D est atteint en $(2,0)$, et en $(-2,0)$ et vaut 16.

Exercice n° 4

1. Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Cette fonction h est continue en 0, car $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0 = h(0)$

Cette fonction h est continue sur l'intervalle $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$ et vérifie $h(a) = 0 = h(0)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,a[$ tel que $h'(c) = 0$, à savoir $cf'(c) - f(c) = 0$. L'équation de la tangente au graphe de f au point $M(c, f(c))$ a pour équation $y - f(c) = f'(c)(x - c)$, en $(0,0)$ on obtient l'expression précédente $cf'(c) - f(c) = 0$. Donc il existe un point M du graphe de f tel que la tangente en M au graphe de f passe par l'origine.

2. Comme $g''(x) \leq 0$ pour tout x de $[a,b]$, la fonction g est concave. Le graphe de g sur $[a,b]$ est donc en dessous de la corde qui joint les points $A(a, g(a))$ et $B(b, g(b))$, donc pour tout x de $[a,b]$, $g(x) \geq Min(g(a), g(b))$, d'où $g(x) \geq 0$. La relation $g(a) = g(b)$ n'est pas nécessaire pour obtenir le résultat.

Exercice n° 5

1. On trouve pour $0 < |x| < 1$: $Ln(1-x) = -\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$

2. On a $a = S(1/2)$ et $\frac{1}{(n+1)(n-2)} = \frac{-1/3}{n+1} + \frac{1/3}{n-2}$.

Pour $0 < |x| < 1$:

$$S(x) = \sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{(n+1)(n-2)} = -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n+1} + \frac{1}{3}\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n-2} = -\frac{1}{3x}\sum_{n\geq 3} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^2}{3}\sum_{n\geq 3} \frac{x^{n-2}}{n-2}$$

$S(x) = -\frac{1}{3x} I(x) + \frac{x^2}{3} J(x)$, où $I(x) = -Ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ et $J(x) = -Ln(1-x)$.

On a : $I(1/2) = Ln\,2 - \frac{2}{3}$ et $J(1/2) = Ln\,2$, d'où $a = -\frac{7}{12} Ln\,2 + \frac{4}{9}$.

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique continue sur R, périodique de période T.

1. En posant $u = nt$, on obtient :

$$\int_a^b f(nt)\,dt = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb} f(u)\,du = \frac{1}{n}\int_{na}^{k_1 T} f(u)\,du + \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \frac{1}{n}\int_{kT}^{(k+1)T} f(u)\,du + \frac{1}{n}\int_{k_2 T}^{nb} f(u)\,du,$$

avec $k_1 = E\left(\frac{na}{T}\right)$ et $k_2 = E\left(\frac{nb}{T}\right)$.

Or $\left|\frac{1}{n}\int_{na}^{k_1 T} f(u)\,du + \frac{1}{n}\int_{k_2 T}^{nb} f(u)\,du\right| \leq \frac{2}{n}\int_0^T |f(t)|\,dt$ qui tend vers zéro.

Et $\sum_{k=k_1}^{k_2-1} \frac{1}{n}\int_{kT}^{(k+1)T} f(u)\,du = \frac{k_2 - k_1}{n}\int_0^T f(u)\,du$ qui converge vers $\frac{(b-a)}{T}\int_0^T f(u)\,du$, d'où le résultat.

2. D'après la question précédente, le résultat est vrai pour une fonction constante sur un intervalle $[a,b]$, et il le reste clairement pour une combinaison linéaire de telles fonctions.
3. Soit φ une fonction continue sur un intervalle borné $[a,b]$. Il existe une suite de fonctions en escalier φ_n qui converge uniformément vers φ (propriétés de l'intégrale de Riemann).

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe p entier strictement positif tel que :

$\forall\, t \in [a,b],\ |\varphi(t) - \varphi_p(t)| < \varepsilon$

On peut toujours supposer que $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(u)\,du = 1$, on a :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt)||\varphi(t) - \varphi_p(t)|\,dt$$

$$+\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi_p(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_p(t)\,dt\right| + \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t) - \varphi_p(t)|\,dt$$

Pour n assez grand, chacune des trois expressions de la somme précédente peut être rendue inférieure à un $\varepsilon' > 0$ quelconque, d'où la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi(t)\,dt$ vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.

4. Pour $f(t) = |\sin t|$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin nt|\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} |\sin u|\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$ et

$\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin u|\,du = 2\int_0^{\pi/2} \sin u\,du = 2$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin nt|\,\varphi(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$

Pour $f(t) = \sin^2 t$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 t\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin^2 u\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$ et

$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 u\,du = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2u}{2}\,du = \frac{\pi}{2}$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 t\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$