ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Soit A la matrice d'une application linéaire de R^n dans R^n.

1. Montrer que l'orthogonal de $\mathrm{Im}(A)$ est $Ker(A^{'})$, où $\mathrm{Im}(A)$ désigne l'image de A et $Ker(A^{'})$ le noyau de la transposée $A^{'}$ de A.

2. Montrer que le problème de minimisation suivant $\underset{v\in R^n}{Min}\|Av-b\|^2$ admet au moins une solution que l'on notera u_0, où $b \in R^n$.

3. Montrer que si u_1 est une autre solution du problème précédent de minimisation, alors $Au_1 = Au_0$.

4. Résoudre le problème posé de minimisation dans le cas où le rang de la matrice A est égal à *n*.

Exercice n° 2

Soit f une fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$, convexe, croissante et non constante. Etudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 3

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère la fonction numérique f définie sur R^2 par $f(x,y) = x^n + y^n - nxy$.

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f et préciser leur nombre (on discutera selon la parité de n).
2. Dans toute la suite de cet exercice, on suppose $n = 4$. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur le disque $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$.
3. Calculer la valeur minimale de f sur D.
4. Vérifier l'inégalité $f(x,y) \leq 16 - 2x^2y^2 - 4xy$ pour tout couple (x,y) appartenant à D. En déduire la valeur maximale de f sur D.

Exercice n° 4

1. Soit f une fonction numérique de classe C^1 telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et vérifiant : $\exists a \in R^* / f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point M du graphe de f tel que la tangente en M au graphe de f passe par l'origine.
2. Soit g une fonction numérique deux fois dérivables sur un intervalle $[a,b]$ telle que $g(a) = g(b) \geq 0$ et $g''(x) \leq 0$ pour tout x de $[a,b]$. Montrer que pour tout x de $[a,b]$ on a $g(x) \geq 0$.

Exercice n° 5

1. Développer en série entière $\ln(1-x)$ pour $0<|x|<1$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.
2. Calculer le réel $a=\sum_{n\geq 3}\frac{1}{2^n(n+1)(n-2)}$ (on pourra utiliser la fonction $S(x)=\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$).

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique continue sur R, périodique de période T.

1. Montrer que $\int_a^b f(nt)\,dt$ converge vers $\frac{(b-a)}{T}\int_0^T f(u)\,du$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour toute fonction en escalier φ sur R, nulle en dehors d'un intervalle borné, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi(t)\,dt=\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\,du\right)$$

3. En déduire que le résultat ci-dessus reste vrai pour toute fonction continue sur un intervalle borné.

4. Expliciter le résultat précédent pour $f(t)=|\sin t|$ et $f(t)=\sin^2 t$.