AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} + 1$.

   f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $[-1, +\infty[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in]0,1[$.

   Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$, ce qui est absurde. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est absurde, donc $l = 1$.

2. f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, $f_n(u_n) = 0$, $f_n(\frac{Ln\,n}{2n}) \approx \frac{Ln\,n}{2} > 0$ et $f_n(2\frac{Ln\,n}{n}) \approx -Lnn < 0$, donc à partir d'un certain rang $\frac{Ln\,n}{2n} \le u_n \le 2\frac{Ln\,n}{n}$

3. $Ln(\frac{Ln\,n}{2n}) \le Ln(u_n) \le Ln(2\frac{Ln\,n}{n})$ implique $Ln(u_n) \approx -Ln\,n$, puis $nLn(1-u_n) = -Ln\,u_n$ implique $-nu_n \approx -Ln\,n$, d'où $u_n \approx \frac{-Ln\,n}{n}$ et enfin $x_n = 1 - \frac{Ln\,n}{n} + o\left(\frac{Ln\,n}{n}\right)$

Exercice n° 2

1. Soit $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$, on effectue le changement de variable $x=e^t$, d'où $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+e^{2t}}{1+e^{4t}}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ch(t)}{ch(2t)}dt$, avec $ch(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ et $sh(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$. On a : $ch2t=1+2sh^2t$. En posant $u=sht$, on obtient : $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+2u^2}du$, puis en posant $t=\sqrt{2}\,u$, $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[Arctg(t)\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

2. A l'aide du changement de variable $x=1/t$, on a : $J=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

donc $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Exercice n° 3

On cherche à déterminer toutes les fonctions numériques continues sur R f qui vérifient : $f(x)=-1-\int_{0}^{x}(x-t)f(t)\,dt$

Supposons que f soit une solution de cette équation, alors

$f(x)=-1-x\int_{0}^{x}f(t)\,dt+\int_{0}^{x}tf(t)\,dt$ et en particulier $f(0)=-1$.

Le terme de droite de l'équation précédente étant dérivable, f est dérivable.

Et $f^{'}(x)=-\int_{0}^{x}f(t)\,dt-xf(x)+xf(x)$, soit $f^{'}(x)+\int_{0}^{x}f(t)\,dt=0$.

Posons $y(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$, on obtient l'équation différentielle : $y^{''}(x)+y(x)=0$.

La solution générale est $y(x)=A\cos x+B\sin x$, et avec les conditions $y(0)=0$ et $y^{'}(0)=-1$, $y(x)=-\sin x$ et $f(x)=-\cos x$

On vérifie aisément que $f(x)=-\cos x$ est solution de l'équation proposée.

Exercice n° 4

Soit $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$

1. $\underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{Lim} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1-\frac{x^2}{2n^2})} = \underset{n\to+\infty}{Lim} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2n^2} = 0$

2. L'intégrale $\int_R g(x)f_n(x)\,dx = \int_a^b g(x)f_n(x)\,dx$ est bien définie. En posant $x = t/n$, on obtient $\int_R g(x)f_n(x)\,dx = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{t^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(t/n)\,dt = \int_R h_n(t)\,dt$ avec $h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{t^2}{2n^2}\right)^{2n^4} g(t/n) I_{[na,nb]}(t)$

Pour n assez grand tel que $a/n, b/n \le 1$ on ait pour tout $t \in [na, nb]$, $\left|t^2/2n^4\right| \le 1/2 < 1$,

$\left|h_n(t)\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1-t^2/2n^4)} \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} = \varphi(t)$. Cette inégalité reste encore valable pour $t \notin [na, nb]$.

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur R, on peut alors appliquer le théorème de converge dominée et conclure $\underset{n\to+\infty}{Lim}\int_R g(x)f_n(x)\,dx = g(0)$, sachant que $\int_R e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$

Exercice n° 5

On note $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x\,dx$,

1. $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1 + tg^2 x) tg^n x\,dx = \frac{1}{n+1}$

2. La suite I_n est décroissante et minorée par zéro donc elle converge.

3. On a $I_n + I_{n+2} \le 2I_n \le I_{n-2} + I_n$, d'où $I_n \approx \frac{1}{2n}$.

Exercice n° 6

1. On suppose que $l \leq a$.

   a. La représentation géométrique montre qu'il y a chevauchement si $\frac{l}{2}\cos\theta \geq d$.

   b. On note ω un lancer de l'aiguille. Les applications $\omega \to d$ et $\omega \to \theta$ sont considérés comme des variables aléatoires uniformes. Elles sont susceptibles de prendre n'importe quelles valeurs dans les intervalles respectifs $[0, a/2]$ et $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit G le graphe de la fonction $\theta \to \frac{l}{2}\cos\theta$ à l'intérieur du pavé $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{a}{2}\right]$. A un lancer de l'aiguille correspond point de coordonnées (θ, l) dans ce pavé. Il y aura chevauchement si et seulement si ce point est en dessous du graphe G. La probabilité de chevauchement est égale à l'aire sous la courbe (cas favorables) divisée par l'aire du pavé (cas possibles) :

$$p = \frac{\frac{l}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta}{\pi \times \frac{a}{2}} = \frac{2l}{\pi a}$$

2. On suppose maintenant $l > a$.

Le raisonnement précédent est encore valable, mais cette fois le graphe G sort du pavé. Pour calculer l'aire incluse dans le pavé il faut évaluer les abscisses $-\alpha$ et α des points d'intersection entre G et le segment supérieur du pavé. On obtient $\alpha = Arc\cos(\frac{a}{l})$.

$$p = \frac{\frac{l}{2}\int_{-\pi/2}^{-\alpha} \cos\theta \, d\theta + 2\alpha\frac{a}{2} + \frac{l}{2}\int_{\alpha}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta}{\pi \times \frac{a}{2}} = \frac{2l(1-\sin\alpha) + 2a\alpha}{\pi a}$$

Exercice n° 7

Pour $\alpha \in]-1,1[$, on donne l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$\forall x \in R, \quad f(x) = (1-x)f(\alpha x)$ où f est une fonction continue sur R.

1. Si f est solution de (E) alors $f(x) = \prod_{k=0}^{n}(1-\alpha^k x)f(\alpha^{n+1}x)$. Quand n tend vers plus l'infini, $f(\alpha^{n+1}x) \to f(0)$ tandis que la suite de terme général $\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha^k x)$ converge. En effet, pour N assez grand, $\forall n \geq N, \prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x) > 0$ et $Ln(\prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x)) = \sum_{k=N}^{n} Ln(1-\alpha^k x)$ et $Ln(1-\alpha^k x)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, $\forall x \in R, \quad f(x) = f(0)\prod_{k=0}^{\infty}(1-\alpha^k x)$. La fonction g a une expression de la même forme, d'où l'égalité de f et g lorsque $f(0) = g(0)$.

2. Par calculs, on obtient que pour $a_0 \in R$ et pour tout n, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha^n}{(1-\alpha^{n+1})}a_n$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in R$ et sa fonction somme $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation prenant la valeur a_0 en 0.

   Ainsi toutes les fonctions f solutions de (E) sont développables en série entière sur R et on vérifie $f(x) = f(0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{\alpha^k}{1-\alpha^{k+1}}\right)x^n$.